

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2010. október 29.

Összefüggőség, Menger-tételek

Egy G gráfot k -szorosan (pont)összefüggőnek nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosan összefüggő, $\kappa(G)$ -vel jelöljük.

Egy G gráfot k -szorosan élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosan élösszefüggő, $\lambda(G)$ -vel jelöljük.

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k -szorosan pontösszefüggő?
3. Bizonyítsuk be, hogy egy k -szorosan összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
4. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden foksám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k -szorosan összefüggő!
5. Igazoljuk, hogy tetszőleges r -reguláris ($r > 1$) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő is!
6. Tegyük fel, hogy G 3-összefüggő, vegyünk fel egy új x pontot, amit G három különböző pontjával összekötünk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 3-összefüggő marad!
7. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem.
8. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
9. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u -ból v -be is és v -ből w -be is k éldiszjunkt irányított út akkor G -ben létezik u -ból w -be is k éldiszjunkt irányított út.
10. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)
11. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r -elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r -elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k -összefüggő?
12. Igazoljuk, hogy ha a 2003-pontú G gráf 11-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 182-élű út.
13. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.

Házi feladatok

1. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?
2. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?