

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2010. október 22.

Összefüggőség bevezetés

Egy G gráfot k -szorosan (pont)összefüggőnek nevezzük, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosan összefüggő, $\kappa(G)$ -vel jelöljük.

Egy G gráfot k -szorosan élösszefüggőnek nevezzük, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosan élösszefüggő, $\lambda(G)$ -vel jelöljük.

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k -szorosan pontösszefüggő?
3. Bizonyítsuk be, hogy egy k -szorosan összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
4. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden foksám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k -szorosan összefüggő!
5. Igazoljuk, hogy tetszőleges r -reguláris páros gráf 2-összefüggő!
6. Tegyük fel, hogy G 3-összefüggő, vegyünk fel egy új x pontot, amit G három különböző pontjával összekötünk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 3-összefüggő marad!
7. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem.