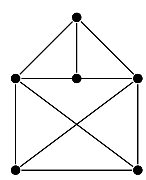
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2010. október 1.

Minimális súlyú feszítőfa, Euler-kör és -út

1. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
2. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ pontok, és legyen a v_iv_j él súlya $\max(i,j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
3. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
4. Hogyan kell egy n csúcsú teljes gráf élei között az $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ súlyokat kiosztani úgy, hogy a minimális súlyú feszítőfa súlya a lehető legnagyobb legyen?
5. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
6. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-köre?
7. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.
8. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?
9. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G élgráfjának, $L(G)$-nek is van Euler-köre!

   (A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)
10. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
11. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
12. Mi a pontos feltétele annak, hogy egy gráf „vaktában bejárható” legyen, azaz létezzen benne olyan pont, ahonnan indított nem folytatható séta csak Euler-kör lehet?
13. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G-ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G-ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?
14. Minimálisan hányszor kell felemelni a ceruzánkat, hogy lerajzoljuk az alábbi gráfot úgy, hogy minden élt pontosan egyszer rajzolunk le és másik élre csak a gráf csúcsainál válthatunk?



15. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris részgráfja, mely az eredeti gráf összes pontját tartalmazza?

    (Egy gráfot *k-regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k.)

16. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

Házi feladatok

1. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
   (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
   (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
   (c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
   (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.