Kombinatorika és gráfelmélet 1.

3. gyakorlat, 2010. szeptember 24.

Fák, Prüfer-kód

1. Egy fa Prüfer kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha F fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az F-beli csúcsok maximális fokszáma.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.
4. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$ ill. $(5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)$?
5. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
6. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)
7. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?
8. A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n-2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?
9. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \ldots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartamazza?
10. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy $d_1, d_2, \ldots, d_n$ egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.
11. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.
12. Bizonyítsuk be, hogy egy fában *az összes* leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*)
13. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.

Házi feladatok

1. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)
2. Adjunk meg tetszőleges k-hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.

Kiegészítés az 1. gyakorlat feladatsorához

26. Az amerikai biliárd 15 számozott golyójának egy bizonyos játéknál olyan sorrendben kell a biliárdasztal lyukaiba gurulnia, mely teljesíti az alábbiakat.
    Az elsőként leguruló golyó tetszőleges. Minden $k \geq 1$-re igaz, hogy az első k legurult golyó sorszámaiból álló halmaz k egymást követő pozitív egész szám halmaza. Hány különböző érvényes legurulási sorrendje van a 15 golyónak?
27. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (*)