Kombinatorika és gráfelmélet 1.

2. gyakorlat, 2010. szeptember 17.

Gráfelméleti alapfogalmak

1. Rajzoljunk olyan egyszerű gráfokat, amiknek rendre $6, 7, 8, 9$ csúcsa van és minden csúcs foka 3.
2. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre $v = 4$, $e = 5$, ill. $v = 5$, $e = 3$, ill. $v = 5$, $e = 7$, ill. $v = 5$, $e = 8$, teljesül, ahol v jelöli a pontok számát, e pedig az élek számát!
3. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző egyszerű gráf létezik?
4. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$ ill. $2, 3, 3, 4, 5, 6, 7$ ill. $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha G tetszőleges egyszerű gráf, akkor a G vagy $\overline{G}$ gráfok valamelyike összefüggő!
6. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $(n-3)$-mal egyenlő!
7. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
8. Igazoljuk, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
10. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatóak úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
11. Igazoljuk a következő állítást. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
14. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
15. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy „forgatással" megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.
16. Igazoljuk, hogy ha egy $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:

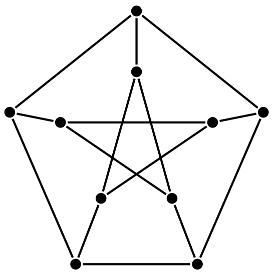
$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots n\}$$

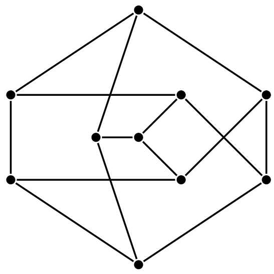
    (Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)
17. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.

19. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges G gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$, ahol $c(G)$ a G gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.

20. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)

21. Igazoljuk, hogy az alábbi két gráf izomorf!

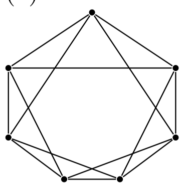


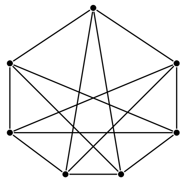


Legyen $k \leq \frac{n}{2}$ és jelölje $\mathrm{KG}(n,k)$ a következő gráfot. $\mathrm{KG}(n,k)$ csúcsai az $\{1,2,\dots n\}$ halmaz összes k-elemű részhalmazai. Két csúcs pontosan akkor van összekötve, ha a két megfelelő k-elemű részhalmaz diszjunkt. ($\mathrm{KG}(n,k)$ az n,k paraméterű Kneser-gráf.)
Mutassuk meg, hogy a $\mathrm{KG}(5,2)$ Kneser-gráf izomorf a fenti két gráffal. (A gráf neve Petersen gráf.)

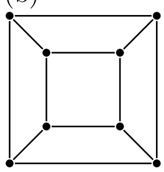
22. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?

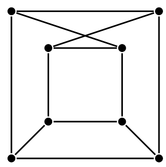
(a)





(b)





23. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely n csúcsú fa, és minden éle azonos színű.

24. Adjuk meg az összes önkomplementer fát!

Házi feladatok

1. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?

2. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?