Kombinatorika és gráfelmélet 1.

13. gyakorlat, 2010. december 10.

Listaszínezés

1. Határozzuk meg $ch(K_{2,4})$ értékét. ($K_{2,4}$ a két színosztályában 2 és 4 pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)
2. Igaz-e, hogy ha $\chi(G) = ch(G)$, akkor $\chi(\overline{G}) = ch(\overline{G})$?
3. Igaz-e, hogy ha a G gráf minden csúcsához adott egy legalább $ch(G)$ méretű színlista, akkor G alkalmas csúcssorrend esetén mohón kiszínezhető úgy, hogy minden csúcsnak a listáján szereplő legkisebb olyan színt választjuk, ami nem azonos az eddig megszínezett, az adott csúccsal szomszédos csúcsok valamelyikének színével?
4. Legyen $K_{2,2,\ldots,2}$ az a gráf, aminek komplementere n diszjunkt él. Határozzuk meg a $ch\left(K_{2,2,\ldots,2}\right)$ listaszínezési számot.
5. Mutassunk olyan gráfot, ami egyetlen gráfnak sem élgráfja.
6. Mutassuk meg, hogy ha G élgráf, akkor $ch(G) \leq 2\chi(G) - 1$.
7. Igazoljuk, hogy ha a véges, egyszerű G gráf minden v csúcsára $|L(v)| > d(v)$ teljesül, akkor G L-listaszínezhető. ($d(v)$ jelöli a v csúcs fokszámát.)
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges T legalább két pontú fára $ch(T) = 2$.
9. Bizonyítsuk be, hogy $ch(K_{n,n^n}) = n + 1$ minden pozitív egész n-re. (K_{n,n^n} a két színosztályában n és n^n pontot tartalmazó teljes páros gráfot jelöli.)
10. Jelölje $\chi''(G)$ a G gráf teljes kromatikus számát, azaz a minimális színszámot, ami szükséges érvényes teljes színezéshez úgy, hogy a csúcsokat és az éleket is színezzük, azzal a feltétellel, hogy érintkező elemek (összekötött csúcsok, közös csúccsal rendelkező élek, egy él és annak egy végpontja) nem lehetnek azonos színűek. Igazoljuk, hogy a listaszínezési sejtésből következne, hogy $\chi''(G) \leq \Delta(G) + 3$ minden G gráfra.