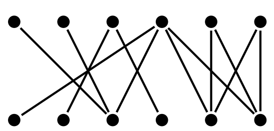
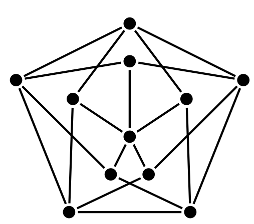
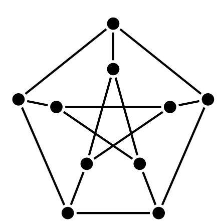
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

10. gyakorlat, 2010. november 12.

Párosítások páros, ill. tetszőleges gráfban; Görög betűk

Görög betűk:
$\alpha(G)$: független pontok maximális száma;
$\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma;
$\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

1. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
2. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.
3. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.
4. Legyen G egy gráf, aminek mindegyik csúcsában ül egy béka. Gongütésre mindegyik béka egy, az általa elfoglalt csúccsal szomszédos csúcsba ugrik. Bizonyítsuk be, hogy a békák pontosan akkor tudnak egyszerre úgy ugrani, hogy a gongütés után is G minden csúcsában pontosan egy béka legyen, ha a G gráf csúcsainak bármely X részhalmazára az teljesül, hogy X G-ből való elhagyása után legfeljebb $|X|$ izolált pont keletkezik. (*)
5. Mutassuk meg, hogy ha G olyan $(n-1)$-öf, $2n$ csúcsú gráf, amire $\tau(G) \geq n$, akkor G-nek van teljes párosítása.
6. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
7. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
8. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
9. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
10. Egy ünnep alkalmával török szultán udvarában a férfiak két-két háremhölgyet választanak. Minden férfinek legalább 2 háremhölgy tetszik. Mi a feltétele annak, hogy minden férfi neki tetsző két háremhölggyel tölthesse az éjszakát?
11. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!

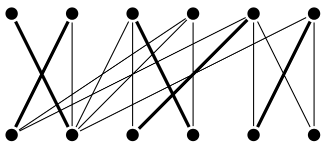
12. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.

13. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!

14. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

15. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.

16. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



Házi feladatok

1. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?

2. (a) Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.

   (b) Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.