A Zykov konstrukció és a Shift gráf

Tetszőleges G gráfra $\omega(G)$ a G *klikkszáma*, vagyis a G-ben található legnagyobb teljes részgráf mérete, $\chi(G)$ pedig G *kromatikus száma*, vagyis G csúcsainak kiszínezéséhez szükséges színek száma (ahol bármely két szomszédos csúcs színe különböző).

Nyilvánvaló, hogy minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G)$. Két olyan gráfosztályt mutatunk, ahol χ tetszőlegesen nagy lehet, miközben $\omega = 2$, vagyis a gráfjaink nem tartalmaznak háromszöget.

Zykov konstrukció.

Legyen Z_1 az egy csúcsból álló gráf. Tegyük fel, hogy $k \geq 1$ és már meghatároztuk a Z_k Zykov gráfot. Vegyük Z_k k darab diszjunkt példányát, legyenek ezek $Z_k^{(1)}, Z_k^{(2)}, \ldots, Z_k^{(k)}$. Vegyünk minden lehetséges módon egy-egy csúcsot mindegyik példányból: $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)}$, $v^{(i)} \in Z_k^{(i)}$ és ehhez a választáshoz vezessünk be egy új $v = v(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)})$ *kiegészítő* csúcsot, amelyet a $v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)}$ csúcsokkal kötünk össze, más csúccsal nem. Az így kapott gráf Z_{k+1}.

Először belátjuk, i-re vonatkozó indukcióval, hogy $\omega(Z_i) = 2$ minden i-re, vagyis Z_i nem tartalmaz háromszöget. Ha $i = 1$, akkor ez nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $i \geq 1$ és Z_i nem tartalmaz háromszöget. Ekkor a Z_{i+1}-ben levő Z_i diszjunkt példányaiban sincs háromszög, a kiegészítő csúcsok szomszédai pedig nincsenek összekötve, hiszen bármely két szomszed Z_i különböző példányában van.

Most pedig belátjuk, hogy minden i-re $\chi(Z_i) = i$, ugyancsak indukcióval i-re. Ez $i = 1$-re triviális. Tegyük fel, hogy $i \geq 1$ és $\chi(Z_i) = i$. Ekkor Z_{i+1} kiszínezhető $i+1$ színnel a következő módon. Színezzük ki Z_i mindegyik példányát i színnel és színezzük ki a kiegészítő csúcsokat egy $i+1$-edik színnel. Ez egy jó színezés, tehát $\chi(Z_{i+1}) \leq i+1$.

Most színezzük ki Z_{i+1} csúcsait i színnel, mondjuk legyenek a színek $1, 2, \ldots, i$. Ekkor, mivel $\chi(Z_i) = i$, Z_i minden példányában használnunk kell az összes színt. Válasszunk minden j-re a j-edik példányban egy j színű csúcsot, vagyis minden $1 \leq j \leq i$-re legyen $v^{(j)} \in Z_k^{(j)}$ olyan, hogy $v^{(j)}$ színe éppen j. Ekkor viszont a $v = v(v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots, v^{(k)})$ kiegészítő csúcsnak mind az i színből van szomszédja, ezért őt nem tudjuk megfelelően kiszínezni, ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy $\chi(Z_{i+1}) \geq i+1$, ezért $\chi(Z_{i+1}) = i+1$.

Shift gráf.

Legyen $m > 1$. Az S_m shift gráf csúcsai legyenek az (i, j) számpárok, ahol $1 \leq i < j \leq m$. (Elképzelhetjük (i, j)-t egy intervallumnak is.)

Két csúcs, mondjuk (i, j) és (i', j') akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $i = j'$ vagy $j = i'$. Vagyis ha az egyik intervallum ott végződik, ahol a másik kezdődik.

Azt állítjuk, hogy S_m nem tartalmaz háromszöget és $\chi(S_m) \geq \log_2 m$. Az első állítás szinte nyilvánvaló. Legyenek (i, j) és (i', j') szomszédos csúcsok, feltehetjük, hogy $j = i'$. Tehát $i < j = i' < j'$. Ekkor viszont nem létezik olyan harmadik csúcs (intervallum) amely egyszerre szomszédos (i, j)-vel és (i', j')-vel. Hiszen egy ilyen intervallum vagy i-ben végződik, vagy j-ben kezdődik, de egyik esetben sem lehet szomszédos (i', j')-vel.

Tegyük most fel, hogy $\chi(S_m) = k$, színezzük ki S_m csúcsait az $1, 2, \ldots k$ színekkel. Minden i-re legyen $H_i \subseteq \{1, 2, \ldots, k\}$ azon színek halmaza, amely (i, j) színe valamilyen $j > i$-re. (Vagyis az i-vel kezdődő intervallumok színeinek a halmaza.)

Ha $i < i'$, akkor $H_i \neq H_{i'}$, mert (i, i') színe, $c \in H_i$, de $c \notin H_{i'}$, különben lenne egy i'-ben kezdődő és végződő c színű intervallum, márpedig ezek szomszédosak S_m-ben. Mivel az $\{1, 2, \ldots, k\}$ halmaznak összesen 2^k részhalmaza van, $m \geq 2^k$, tehát $\chi(S_m) = k \geq \log_2 m$.

Ezért tetszőleges k-ra $S = S_{2^k}$ egy olyan gráf, amelyre $\omega(S) = 2$ és $\chi(S) \geq k$.