Kombinatorika és gráfelmélet I
2. Pót ZH, 2012. december 7. 12.15-13.45, H 406
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a felttele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jr. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A 10 csúcsú G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_5$ és $u_1, u_2, \ldots, u_5$. A v_i és v_j pontok össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 1$ vagy 4, ugyanígy az u_i és u_j pontok össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 1$ vagy 4, az u_i és v_j pontok pedig össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 0$, 1 vagy 4. Más él nincs. (Vagyis G-t úgy is megkaphatjuk, hogy egy 5 hosszú kör minden pontját megduplázzuk.) Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

Ha elhagyjuk az u_1, v_1, u_3, v_3 pontokat, akkor a maradék gráf nem lesz összefüggő: az egyik komponensben lesznek az u_2, v_2 pontok, a másikban a többi. 2 pont

Nevezzük a (u_i, v_i) párokat *ikertestvéreknek* $(1 \le i \le 5)$. Hagyjunk el most három pontot a gráfból, legyen a kapott gráf G'. Ekkor az ikertestvér-párok közül legfeljebb egy olyan lehet, amelynek mindkét tagját elhagytuk. Feltehetjük tehát az általánossag megszorítása nélkül, hogy G'-ben az (u_i, v_i) párnak legalább egy tagja szerepel $(1 \le i \le 4)$. (Az (u_5, v_5) párra ez nem feltétlenül igaz.) 4 pont

Nyilván ha egy ikerpár mindkét tagja benne van G'-ben, akkor azok össze is vannak kötve. Most legyen w_i és w_j G' két csúcsa, $i < j$, ahol $w_i = u_i$ vagy v_i és $w_j = u_j$ vagy v_j. Ekkor található egy olyan $w_i w_{i+1} \ldots w_j$ út G'-ben, ahol minden $w_k = u_k$ vagy v_k $i \le k \le j$. Tehát G' összefüggő. 3 pont

Ezért G pont-összefüggőségi száma $\kappa(G) = 4$. 1 pont

2. Mennyi az 1. feladatban szereplő gráf kromatikus száma?

Próbáljuk kiszínezni G-t négy $(1,2,3,4)$ színnel. Mondjuk az (u_1, v_1) pár kapja az $1, 2$ színeket. Ekkor az (u_2, v_2) pár kapja a $3, 4$ színeket, mert u_1, v_1, u_2, v_2 egy teljes négyest határoz meg, (u_3, v_3) az $1, 2$ színeket, (u_4, v_4) a $3, 4$ színeket, és (u_5, v_5) az $1, 2$ színeket, ami szerencsére ellentmondás, mert u_1, v_1, u_5, v_5 is egy teljes négyest határoz meg. Ezért $\chi(G) \ge 5$. 5 pont

Viszont G összefüggő, nem páratlan kör, és nem is teljes gráf, minden pont foka 5, tehát a Brooks tétel szerint $\chi(G) \le 5$. 4 pont

Tehát $\chi(G) = 5$. 1 pont

Második rész másképp:

G-t ki tudjuk színezni öt színnel a következő módon: u_1: 1, v_1: 2, u_2: 3, v_2: 4, u_3: 5, v_3: 1, u_4: 2, v_4: 3, u_5: 4, v_5: 5. 4 pont

Tehát $\chi(G) = 5$. 1 pont

3. Legyen G egy 10 csúcsú gráf, $\chi(G) = 3$.

a. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \le 6$.

b. Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) \ge 2$.

a. Színezzük ki a gráfot három színnel (piros, kék, zöld). Ha mind a három színosztály legfeljebb 3 elemű lenne, akkor összesen legfeljebb 9 csúcs lehetne. Tehát valamelyik színosztály (mondjuk a zöld) legalabb négy elemű. 3 pont

Ezek szerint a piros és kék pontok együttvéve legfeljebb 6-an vannak. Ez a legfeljebb hat pont pedig lefogja az összes élet, mert nincs olyan él, amelynek mindkét végpontja zöld. 3 pont

b. Ha $\tau(G) = 1$, akkor a gráf egy csillag; azt az egy lefogó pontot kiszínezhetjük mondjuk pirossal, az összes többi pontot kékkel, mert azok között nem fut él. Tehát ekkor $\chi(G) \leq 2$, ami ellentmond a feltételnek, ezért $\tau(G) \geq 2$. 4 pont

4. $G(A, B; E)$ egy 100 csúcsú páros gráf, minden $X \subseteq A$ és $X \subseteq B$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$. ($N(X)$ azon pontok halmaza, amelyeknek van X-beli szomszédja.) Bizonyítsuk be, hogy $\tau(G) = 50$.

A feltételt $X = A$-ra illetve $X = B$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy $|A| \leq |N(A)| \leq |B|$, illetve $|B| \leq |N(B)| \leq |A|$, összevetve $|A| = |B|$. 3 pont

Tehát teljesülnek a Frobenius tetel feltételei: $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$ halmazra $|N(X)| \geq |X|$. Ezért található a gráfban teljes párosítás, ami 50 darab független él. Vagyis $50 \leq \tau(G)$. 4 pont

Ugyanakkor Az A (vagy a B) halmaz egy lefogó ponthalmaz, mert G páros gráf. Ezért $50 \geq \tau(G)$, összevetve megkaptuk, hogy $\tau(G) = 50$. 3 pont

5. $G_1(V, E_1)$ és $G_2(V, E_2)$ két éldiszjunkt gráf (ugyanazokon a csúcsokon). Tudjuk, hogy G_1 3-élösszefüggő, G_2 4-élösszefüggő. Legyen $G = G(V, E_1 \cup E_2) = G_1 \cup G_2$ az a gráf, amelynek a csúcshalmaza V, élhalmaza pedig $E_1 \cup E_2$.

a. Bizonyítsuk be, hogy G 7-élösszefüggő.

b. Mutassunk olyan 3-élösszefüggő G_1, és 4-élösszefüggő G_2 *(nem feltétlenül éldiszjunkt)* gráfokat, amelyekre a $G = G_1 \cup G_2$ gráf 1000-élösszefüggő.

a. Tegyük fel, hogy a $G_1 \cup G_2$ hat él elhagyásával két komponensre esik szét. Ekkor, mivel G_1 és G_2 éldiszjunktak, vagy legfeljebb 2 tartozik az hat él közül G_1-hez, vagy pedig legfeljebb 3 tartozik G_2-höz. 3 pont

A megfelelő 2 (illetve 3) él elhagyásával G_1 (illetve G_2) két komponensre esik szét, ami ellentmond annak, hogy 3-élösszefüggő (illetve hogy G_2 4-élösszefüggő). Tehát $G_1 \cup G_2$ 7-élösszefüggő. 3 pont

b. Legyen V, a csúcshalmaz 10000 elemű. Legyen G_1 és G_2 ugyanaz a gráf, a teljes gráf V-n. 2 pont

Ekkor $G_1 \cup G_2 = G_1 = G_2$. Ha G_1-et egy x és egy $10000 - x$ elemű komponensre akarjuk felbontani, akkor a köztük futó $x(10000 - x) \geq 9999$ élet kell elvennünk. Tehát G_1, G_2, és $G_1 \cup G_2$ is 9999-élösszefüggő. Ami kielégíti a felételeket, hiszen ebből következik, hogy G_1 3-élösszefüggő, G_2 4-élösszefüggő, és $G = G_1 \cup G_2$ 1000-élösszefüggő. 2 pont

a. második megoldás: Legyen u és v két tetszőleges csúcs. A Menger tétel miatt G_1-ben van három éldiszjunkt út u és v között, G_2-ben pedig négy. 2 pont

A $G = G_1 \cup G_2$ gráfban ez a hét uv út benne van, és mivel G_1-nek és G_2-nek nincs közös éle, ez a hét út éldiszjunkt. 2 pont

Tehát G-ben bármely két pont között van hét éldiszjunkt út, akkor viszont G 7-élösszefüggő. 2 pont

6. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{45}$. A v_i és v_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $i \cdot j$ osztható 8-cal. Határozzuk meg $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.

Először értsük meg, hogy mi is ez a gráf. Beosztjuk a csúcsokat a következő négy osztalyba: A: nyolccal osztható indexű csúcsok, $|A| = 5$. B: néggyel igen, de nyolccal nem osztható indexű csúcsok, $|B| = 6$. C: kettővel igen, de néggyel nem osztható indexű csúcsok, $|C| = 11$. D: páratlan indexű csúcsok, $|D| = 23$. 2 pont

Az A-beli csúcsok minden más csúccsal össze vannak kötve, a B-beli csúcsok ezenkívül össze vannak kötve egymással és a C-beli csúcsokkal. Más él nincs. 2 pont

Itt $C \cup D$ egy 34 elemű független halmaz. Tehát $\alpha(G) \geq 34$. 2 pont

Ugyanakkor könnyen vehetünk az A-beli és D-beli csúcsok között 23 élet, amelyek lefogják A-t és D-t, es a B-beli és C-beli csúcsok között 11 élet, amelyek lefogják B-t és C-t. Ez 34 elemű lefogó élrendszer, tehát $\rho(G) \leq 34$. 2 pont

Ebből a két egyenlőségből $34 \leq \alpha(G) \leq \rho(G) \leq 34$, tehát $34 = \alpha(G) = \rho(G)$. 2 pont

($\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\chi(G)$: G kromatikus száma.)