Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PÓTZH, 2017. május 11, 12.15-13.45, T 604

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám.

1. G egy 100 csúcsú gráf, $\chi(G) \leq 11$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 10$.

Színezzük ki G-t $\chi(G) \leq 11$ színnel. 2 pont

Ekkor van olyan színosztály, amelynek legalább 10 csúcsa van, ellenkező esetben legfeljebb $9 \cdot 11 = 99$ csúcsunk lehetne. 4 pont

Egy színosztály pedig független pontokból áll, hiszen azonos színű pontok között nem futhat él. 2 pont

Tehát találtunk legalább 10 független pontot, ezért $\alpha(G) \geq 10$. 2 pont

2. A (25 csúcsú) G gráf csúcsai $v_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq 5$. A $v_{i,j}$ és $v_{k,l}$ különböző csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i - k| = 0, 1$, vagy 4. Határozzuk meg $\chi'(G)$-t, G élkromatikus számát.

A G gráfban minden csúcs foka $5 + 4 + 5 = 14$. 2 pont

Tehát a Vizing tétel alapján $14 \leq \chi'(G) \leq 15$. 2 pont

Tegyük fel, hogy sikerült kiszínezni az éleket 14 színnel. Ekkor, mivel minden csúcs foka pontosan 14, minden csúcsba mind a 14 színű élből pontosan egy fut be. Vagyis az azonos színű élek teljes párosítást alkotnak. De ez lehetetlen, mert 25, vagyis páratlan sok csúcsunk van. 5 pont

Ezért $\chi'(G) = 15$. 1 pont

3. G megint egy 100 csúcsú gráf amelynek nincs izolált pontja, $\rho(G) = 98$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

A Gallai tétel szerint $\rho(G) + \nu(G) = 100$, tehát a független élek maximális száma, $\nu(G) = 2$. 3 pont

Legyen uv és xy két független él. A feltételek szerint a többi (u, v, x, y-tól különböző) 96 csúcs között nem fut él. 3 pont

Színezzük ki ezt a 96 csúcsot egyforma színűre, az u, v, x, y csúcsokat pedig további 4 színnel. 2 pont

Ez egy jó 5-színezése G-nek, tehát $\chi(G) \leq 5$. 2 pont

(Valójában $\chi(G) \leq 4$ is igaz, és nem is sokkal nehezebb bebizonyítani.)

4. G egy 2-élösszefüggő egyszerű páros gráf A és B osztályokkal, $|A| = n$, $n > 1$. Az A osztály csúcsai $v_1, \ldots, v_n$, v_i fokszáma d_i. Tudjuk, hogy minden $i \neq j$-re $d_i + d_j \geq 2n$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz n független élet.

Bebizonyítjuk, hogy teljesül a Hall feltétel. Legyen $X \subseteq A$, $N(X) \subseteq B$ X szomszédainak a halmaza. Mivel G egy 2-élösszefüggő, minden csúcs foka legalább 2. Tehát $|N(X)| \geq 2$ minden X-re. Ezért ha $|X| \leq 2$, akkor mindenképpen $|N(X)| \geq |X|$. 4 pont

Tegyük fol, hogy $|X| \geq 2$, legyen $u, v \in X$. Mivel $d(u) + d(v) \geq 2n$, vagy $d(u) \geq n$, vagy $d(v) \geq n$, de mindenképpen $|N(X)| \geq n \geq |X|$. 4 pont

Ezzel beláttuk, hogy teljesül a Hall feltétel, vagyis a Hall tétel alapján van A-t lefedő párosítás, ami n független élet jelent. 3 pont

5. A 100 csúcsú G egyszerű gráfból bárhogyan elhagyunk 2 élet, síkgráfot kapunk. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 5$.

Ha G-ben minden csúcs foka legfeljebb 1, akkor triviálisan $\chi(G) \leq 5$, sőt, $\chi(G) \leq 2$. 1 pont

Tegyük föl, hogy $d(v) \geq 2$, és legyen vu és vw G két éle. 1 pont

Hagyjuk el őket G-ből. A megmaradt G' gráf síkgráf, tehát a Négyszíntétel alapján ki tudjuk színezni 4 színnel. 4 pont

Most színezzük át a v csúcsot egy ötödik színre. 2 pont

Így már nyugodtan visszatehetjük a vu és vw éleket, tehát a G gráf jó 5-színezését kaptuk. Vagyis $\chi(G) \leq 5$. 2 pont

6. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $e(G) - t(G)$ mennyiség maximumát és minimumát, ha G bármilyen 100 csúcsú (nem feltétlenül összefüggő) egyszerű gráf lehet.

Az Euler formula alapján $n(G) - e(G) + t(G) = 1 + k(G)$, ahol $k(G)$ a komponensek száma. Ennek alapján $e(G) - t(G) = n(G) - 1 - k(G) = 99 - k(G)$. 3 pont

Tehát $e(G) - t(G)$ akkor maximális, ha $k(G)$ minimális, vagyis 1, vagyis $e(G) - t(G)$ maximuma 98, ennyit el is érhetünk ha G összefüggő síkgráf. 3 pont

Végül $e(G) - t(G)$ akkor minimális, ha $k(G)$ maximális. Mivel G-nek 100 csúcsa van, $k(G) \leq 100$. Tehát $e(G) - t(G)$ minimuma -1, ennyit el is érhetünk ha G-nek nincs éle. 4 pont