Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PótZH, 2016. május 17, 12.15-13.45, H 405

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám.

1. A 2016 csúcsú G gráfban a maximális fokszám $\Delta(G) = 9$. Bizonyítsuk be, hogy $\alpha(G) \geq 202$.

Első megoldás:

Válasszunk ki egy csúcsot és hagyjuk el gráfból a szomszédaival együtt. Ezt ismételjük a maradék gráfban addig, amíg el nem fogy a gráf. 4 pont

Minden lépésben egy új pontot választottunk ki. A kiválasztott pontok függetlenek, mert mindig elhagytuk a kiválasztott pont szomszédait. 3 pont

Mivel $\Delta(G) = 9$, egy lépésben legfeljebb 10 pontot hagytunk el a gráfból. Tehát legalább 202 lépést tudtunk tenni, vagyis legalább 202 pontot ki tudtunk választani, tehát $\alpha(G) \geq 202$. 3 pont

Második megoldás:

Vegyünk egy maximális független X ponthalmazt G-ben, legyen ennek $|X| = k$ pontja. Ekkor az összes többi pont X legalább egy csúcsával össze van kötve. (Különben hozzávehetnénk X-hez.) 5 pont

Viszont minden csúcsnak legfeljebb 9 szomszédja van, tehát $2016 - k \leq 9k$. Ebből pedig azt kapjuk, hogy $k \geq 202$. 5 pont

2. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{17}$, v_i és v_j pontosan akkor van összekötve éllel, ha $|i-j| = 1, 2, 15, 16$. Határozzuk meg $\chi(G)$-t.

Először belátjuk, hogy $\chi(G) \geq 4$. Próbáljuk meg G-t kiszínezni a piros, fehér, zöld színekkel. A v_1, v_2, v_3 csúcsok össze vannak kötve, ezért különböző színűek, feltehetjük, hogy v_1 piros, v_2 fehér, v_3 zöld. 2 pont

Mivel bármely három szomszédos csúcs össze van kötve, csak egyféleképpen, periodikusan folytathatjuk a színezést: v_4 piros, v_5 fehér, ... Vagyis v_i piros, ha $i = 3k+1$, fehér, ha $i = 3k+2$, zöld, ha $i = 3k$. Tehát v_{17} fehér. Viszont v_2 is fehér, ami ellentmondás, mert szomszédosak. 4 pont

Négy színnel viszont kiszínezhető: v_1 piros, v_2 fehér, v_3 zöld, v_4 kék, v_5 piros, v_6 fehér, v_7 zöld, v_8 kék, v_9 piros, v_{10} fehér, v_{11} zöld, v_{12} piros, v_{13} fehér, v_{14} zöld, v_{15} piros, v_{16} fehér, v_{17} zöld. 4 pont

3. Határozzuk meg az olyan 10 csúcsú G gráfok maximális élszámát, amelyekre $\tau(G) = 4$ és $\chi(G) = 4$.

Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$. Tudjuk, hogy közülük 4 lefogja az összes élet, legyenek ezek v_1, v_2, v_3, v_4. 1 pont

A maximális élszámú gráfot a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon, azzal a feltétellel, hogy v_1, v_2, v_3, v_4 egy lefogó ponthalmaz, úgy kapjuk, hogy behúzzuk az összes élet, ami a v_1, v_2, v_3, v_4 csúcsokra illeszkedik. Legyen ez a gráf H. 3 pont

A H gráfban viszont van teljes 5 csúcsú gráf, például v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, ezért a kromatikus száma sajnos legalább 5. (Persze pontosan 5, de ez most nem kell.) Ezért H nem felel meg a feltételeinknek, el kell hagynunk belőle legalább egy élt.

Hagyjuk el a v_1v_2 élt H-ból, legyen a kapott gráf G. G-nek továbbra is van 4 lefogó pontja, v_1, v_2, v_3, v_4, ugyanakkor van négy független éle is, például v_1v_5, v_2v_6, v_3v_7, v_4v_8, tehát $\tau(G) = 4$. 2 pont

A kromatikus száma, $\chi(G) = 4$, mert egyrészt v_2, v_3, v_4, v_5 egy teljes 4 csúcsú gráfot alkot, másrészt, ha v_1 kék, v_2 kék, v_3 sárga, v_4 piros, a többi csúcs fekete, az egy jó 5-színezés. 2 pont

Teát G egy maximális élszámú gráf, ami kielégíti a feltételeket, 29 éle van, úgyhogy a válasz 29. 2 pont

4. G egy egyszerű páros gráf A és B osztályokkal. A csúcsai $v_1, \dots, v_n$, v_i fokszáma d_i. Tegyük fel, hogy n páros. Tudjuk, hogy minden i-re $d_i \geq i/2$. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz legalább $n/2$ független élet.

Hagyjuk el G-ből az A-beli páratlan indexű csúcsokat, legyen az így kapott részgráf G', A' és B osztályokkal. 4 pont

Belátjuk, hogy teljesül a Hall feltétel. Legyen $X \subseteq A'$. Legyen v_i X-ben a legmagasabb indexű csúcs. Mivel minden index különböző és páros, $i \geq 2|X|$. Ezért a feltétel alapján $d_i \geq i/2 \geq |X|$. 3 pont

Tehát $|N(X)| \geq d_i \geq |X|$, vagyis teljesül a Hall feltétel, van A'-t lefedő párosítás G'-ben, így G-ben is, ez pedig éppen $n/2$ független él. 3 pont

5. A G gráfot sikerült két élmetszéssel lerajzolnunk. (két metszéspont, mindkettőben pontosan két él metszi egymást) Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 6$.

Legyen az egyik metszéshez tartozó két él négy végpontja közül az egyik v, a másik metszéshez tartozó két él négy végpontja közül az egyik u. 3 pont

Hagyjuk el G-ből v-t és u-t és a hozzájuk csatlakozó éleket. Így kapjuk a G' gráfot, ami metszés nélkül van lerajzolva. Tehát a Négyszíntétel szerint kiszínezhető négy színnel. 4 pont

Színezzük ki v-t és u-t egy ötödik és egy hatodik színnel. Ez a színezés mutatja, hogy $\chi(G) \leq 6$. 3 pont

(Egyebként nem nehéz belátni, hogy $\chi(G) \leq 5$ is teljesül.)

6. Határozzuk meg a 24 élű, összefüggő, (akárhány csúcsú), egyszerű síkbarajzolt G gráfok tartományainak, $t(G)$-nek a lehetséges legkisebb és legnagyobb értékét.

Minimum: Bármilyen síkbarajzolt gráf esetén a tartományok száma legalább 1, ezt pedig el is érhetjük, például vegyünk egy 24 élű (25 csúcsú) utat. 2 pont

Maximum: Legyen G egy 24 élű n csúcsú, egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf, t tartománnyal. Az Euler formula alapján $n - e + t = 2$, behelyettesítve $n - 24 + t = 2$ vagyis $t = 26 - n$. Tehát n-et kell minimalizálni. Nyilván $n \geq 3$, mert $e = 24$. 3 pont

Viszont tudjuk, hogy minden egyszerű, legalább 3 csúcsú síkgráfra $e \leq 3n - 6$, a mi esetünkben $24 \leq 3n - 6$ tehát $10 \leq n$. 3 pont

Ugyanakkor egy 10 csúcsú síkbarajzolt gráfnak, amelynek minden tartománya háromszög, éppen $3 \cdot 10 - 6 = 24$ éle van. Tehát ez adja a tartományok maximumát, ami pl a fenti $t = 26 - n$ összefüggés alapján 16. 2 pont