Kombinatorika és gráfelmélet I

2. Aláírásótló ZH, 2014. december 17. 8.15-9.45, IB 134

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét**, **NEPTUN kódját** és **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-23 pont: 1, 24-32 pont: 2, 33-41 pont: 3, 42-50 pont: 4, 51-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Íròszeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közben történő együttműködés.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám, $\kappa(G)$: pontösszefüggőségi szám, $\lambda(G)$: élösszefüggőségi szám.

Definíció. Legyen G egy tetszőleges egyszerű gráf a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, $k > 0$ egész. A kG gráf csúcsai v_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$, a v_{ij} és $v_{i'j'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve éllel kG-ben, ha $i = i'$, vagy ha v_i és $v_{i'}$ össze vannak kötve G-ben. Vagyis úgy kapjuk a kG gráfot G-ből, hogy G minden csúcsát helyettesítjük k csúccsal, két új csúcs akkor és csak akkor van összekötve kG-ben, ha ugyanabból a G-beli csúcsból származnak, vagy ha a megfelelő két G-beli csúcs össze volt kötve G-ben.

1. Legyen G egy egyszerű gráf, Tegyük fel, hogy $\kappa(G)$, G pontösszefüggőségi száma 3. Bizonyítsuk be, hogy $\kappa(3G) = 9$.

2. Legyen $G = C_7$, a 7 hosszú kör. Bizonyítsuk be, hogy $7 \leq \chi(3G) \leq 8$.

3. Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfra $\nu(G) = 3$ és $\chi(G) = 7$. Bizonyítsuk be, hogy $\omega(G) \geq 6$.

4. Legyen G egy páros gráf A, B osztályokkal. Tegyük fel, hogy minden $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \geq |X| - 1$. ($N(X)$ az X-hez tartozó csúcsok szomszédainak halmaza) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van olyan párosítás, amely A-t egy csúcs kivételével lefedi.

5. A G gráfról tudjuk, hogy élösszefüggőségi száma, $\lambda(G) = 2$. Ha a v csúcsot elhagyjuk G-ből, akkor a kapott $G \setminus \{v\}$ gráf pontosan három összefüggő komponensből áll. Bizonyítsuk be, hogy v foka, $d_v \geq 6$.

6. A G egyszerű gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots v_{15}$ és $u_1, u_2, \ldots, u_{15}$. A v_i és u_j pontok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha ij osztható 4-gyel. Más él nincs. Határozzuk meg $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.