Kombinatorika és gráfelmélet I

2. PótZH, 2014. december 12. 8.15-9.45, J 209

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a felttele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jr. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

Segítség: $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\omega(G)$: klikkszám, $\chi(G)$: kromatikus szám.

1. A 64 csúcsú egyszerű G gráf csúcsai v_{ij}, $1 \leq i, j \leq 8$. A v_{ij} és $v_{i'j'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve éllel, ha $|i - i'| \leq 1$ vagy $|i - i'| = 7$. Bizonyítsuk be hogy G pontösszefüggőségi száma, $\kappa(G) = 16$.
(Vagyis G csúcsait megfeleltethetjük egy sakktábla mezőinek, két csúcs össze van kötve, ha egy oszlopban vagy szomszédos oszlopban vannak, vagy ha az egyik az első, a masik az utolsó oszlopban van.)

Be kell bizonyítanunk, hogy akárhogyan hagyunk el 15 pontot G-ből, a megmaradó gráf összefüggő marad, de 16 alkalmas pont elhagyásával már el tudjuk érni, hogy a maradék gráf ne legyen összefüggő. 1 pont

Hagyjunk el 15 pontot G-ből. Ekkor legfeljebb egy oszlop (mondjuk az i-edik) kivételével minden oszlopban marad csúcs. Ekkor viszont a megmaradt gráf összefüggő, mert az $i+1$-edik oszlopban megmaradt csúcsok össze vannak kötve egymással is és az $i+2$-edik oszlopban levőkkel, az $i+2$-edik oszlopban megmaradt csúcsok is össze vannak kötve egymással is és az $i+3$-adik oszlopban levőkkel, és így tovább, az utolsó oszlopban levők is egymással és az elso oszlopban levőkkel, stb, egészen az $i-1$-ik oszlopig. 5 pont

Most hagyjuk el az első és a marmadik oszlophoz tartozó csúcsokat. Ekkor a második oszlophoz tartozó csúcsok el lesznek választva a többi megmaradt csúcstól. 4 pont

2. A 10 csúcsú egyszerű H gráf csúcsai v_{ij}, $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 2$. A v_{ij} és $v_{i'j'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve éllel, ha $|i - i'| \leq 1$ vagy $|i - i'| = 4$. Bizonyítsuk be hogy H kromatikus száma, $\chi(H) = 5$.
(Vagyis G-t úgy is megkaphatjuk, hogy egy öt hosszú kör minden csúcsát helyettesítjük két, összekötött csúccsal.)

G-ben van teljes 4-es, ($v_{1,1}$, $v_{1,2}$, $v_{2,1}$, $v_{2,2}$) tehát a kromatikus szám legalább 4. Próbáljuk meg kiszínezni H-t az 1, 2, 3, 4 színekkel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $v_{1,1}$ és $v_{1,2}$ csúcsok színe 1 és 2. Ekkor $v_{2,1}$ és $v_{2,2}$ színe 3 és 4, mert $v_{1,1}$, $v_{1,2}$, $v_{2,1}$, $v_{2,2}$ teljes 4-est alkotnak, hasonlóan $v_{3,1}$ és $v_{3,2}$ színe 1 és 2, $v_{4,1}$ és $v_{4,2}$ színe 3 és 4, $v_{5,1}$ és $v_{5,2}$ színe pedig megint 1 és 2, ami ellentmondás, mert $v_{1,1}$, $v_{1,2}$, $v_{5,1}$, $v_{5,2}$ is teljes 4-est alkotnak. Tehát $\chi(H) \geq 5$. 5 pont

Viszont öt színnel ki lehet H-t színezni: $v_{1,1}$ és $v_{1,2}$ színe 1 és 2, $v_{2,1}$ és $v_{2,2}$ színe 3 és 4, $v_{3,1}$ és $v_{3,2}$ színe 5 és 1, $v_{4,1}$ és $v_{4,2}$ színe 2 és 3, $v_{5,1}$ és $v_{5,2}$ színe pedig 4 és 5. (Másképpen: H-ban minden csúcs foka 5, összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, tehát a Brooks tétel alapján $\chi(H) \leq 5$. 5 pont

3. Tegyük föl, hogy a G egyszerű gráfra $\nu(G) = 5$ és $\omega(G) = 9$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq 10$.

Legyen $v_1u_1, v_2u_2, \ldots, v_5u_5$ 5 független él G-ben. (Ilyen 5 él van, mert $\nu(G) = 5$.) 1 pont

Mivel $\omega(G) = 9$, a $v_1, v_2, \ldots, v_5, u_1, u_2, \ldots, u_5$ csúcsok nem alkotnak teljes gráfot. Ekkor viszont kiszínezhetők 9 színnel. 5 pont

Mivel nincs 6 független él, a $v_1, v_2, \ldots, v_5, u_1, u_2, \ldots, u_5$ pontoktól különböző pontok között nem fut él. Ezek tehát kiszínezhetők egy tizedik színnel. 3 pont

Tehát $\chi(G) \leq 10$. 1 pont

4. Legyen G egy páros gráf A, B osztályokkal. Tegyük fel, hogy minden $X \subseteq A$ esetén, ha $|X|$ páratlan, akkor $|N(X)| \geq |X| + 1$. ($N(X)$ az X-hez tartozó csúcsok szomszédainak halmaza)

Bizonyítsuk be, hogy G-ben van A-t lefedő párosítás.

Legyen $X \subseteq A$. Ha $|X|$ páratlan, akkor $|N(X)| \geq |X| + 1 > |X|$. 3 pont

Legyen $|X|$ páros. Hagyjunk el egy csúcsot X-ből, legyen a megmaradt halmaz X'. Ekkor $|X'|$ páratlan, tehát $|N(X')| \geq |X'| + 1$. 3 pont

Ennek alapján $|N(X)| \geq |N(X')| \geq |X'| + 1 = |X|$. 2 pont

Tehát alkalmazhatjuk a Hall tételt, ennek alapján van A-t lefedő párosítás. 2 pont

5. A G gráfban a v csúcs foka 5. A v csúcsot elhagyva a gráfból a megmaradt gráf nem összefüggő. Bizonyítsuk be, hogy G élösszefüggőségi száma, $\lambda(G) \leq 2$.

Legyen a $G \setminus \{v\}$ gráf két összefüggő komponense C_1 és C_2. (Ha több komponens van, akkor a többivel nem is foglalkozunk.) 3 pont

A v csúcs foka 5, tehát C_1 és C_2 közül valamelyikhez legfeljebb 2 éllel csatlakozik. 3 pont

Ezt a legfeljebb 2 élet elhagyva a megfelelő komponens, C_1 vagy C_2, leesik a gráfról, vagyis egy összefüggő komponenssé válik. 3 pont

Tehát $\lambda(G) \leq 2$. 1 pont

6. A G egyszerű gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots v_{16}$ és $u_1, u_2, \ldots, u_{16}$. A v_i és u_j pontok össze vannak kötve akkor és csak akkor, ha ij osztható 9-cel. Más él nincs. Határozzuk meg $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.

Először ertsük meg, mi ez a gráf. v_9 az összes u_i ponttal össze van kötve, u_9 az összes v_i ponttal, ezenkívül a v_3, v_6, v_{12}, v_{15} pontok illetve az u_3, u_6, u_{12}, u_{15} pontok között egy teljes páros gráf van. Más él nincs. 1 pont

Az $u_9, v_9, v_3, v_6, v_{12}, v_{15}$ pontok lefogják az összes élet, tehát $\tau(G) \leq 6$. 2 pont

Ugyanakkor a v_9u_1, v_1u_9, $v_3u_3, v_6u_6, v_{12}u_{12}, v_{15}u_{15}$ élek függetlenek, tehát $\nu(G) \leq 6$. 2 pont

A Kőnig tétel szerint $\tau(G) = \nu(G)$ (G páros gráf) ezért $\tau(G) = \nu(G) = 6$. 2 pont

A Gallai tétel alapján $\alpha(G) + \tau(G) = 32$ tehát $\alpha(G) = 26$. 2 pont

Vegül pedig akár a Gallai ($\nu(G) + \rho(G) = 32$) akár a Kőnig ($\alpha(G) = \rho(G)$) alapján azt kapjuk, hogy $\rho(G) = 26$. 1 pont