Kombinatorika és gráfelmélet I
2. ZH, 2012. november 26. 14.15-15.45, K 155
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A 22 csúcsú G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_{11}$ és $u_1, u_2, \dots, u_{11}$. A v_i és v_j pontok össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 1$ vagy 10, ugyanígy az u_i és u_j pontok össze vannak kötve éllel akkor és csak akkor, ha $|i-j| = 1$ vagy 10, és minden i-re ($1 \le i \le 11$) v_i és u_i is össze vannak kötve éllel. Más él nincs. (Vagyis G két 11 hosszú körből áll, amik össze vannak kötve egy teljes párosítással.) Határozzuk meg G pont-összefüggőségi számát.

Mivel a minimális fokszám (sőt, minden fokszám) 3, $\kappa(G) \le 3$. 3 pont

Hagyjunk most el két pontot G-ből. Ha mindkettő az $u_1, u_2, \dots, u_{11}$ körön van, akkor a $v_1, v_2, \dots, v_{11}$ kör és a megmaradt $v_i u_i$ élek egy összefüggő gráfot alkotnak a megmaradt csúcsokon. 2 pont

Ugyanígy érvelhetünk akkor is, ha mindkét elhagyott pont a $v_1, v_2, \dots, v_{11}$ körön van. 1 pont

Most tegyük fel, hogy az egyik pontot az $u_1, u_2, \dots, u_{11}$ körből hagyjuk el, a másikat meg a $v_1, v_2, \dots, v_{11}$ körből. Ekkor mindkét körből marad egy út amit a megmaradt $v_i u_i$ élek összekötnek. 3 pont

Mivel a gráfnak 22, vagyis legalább 4 pontja van, az eddigiek alapján $\kappa(G) \ge 3$, tehát $\kappa(G) = 3$. 1 pont

2. Mennyi az 1. feladatban szereplő gráf kromatikus száma?

Az $u_1, u_2, \dots, u_{11}$ kör 11, vagyis páratlan sok csúcsú, ezért a kromatikus száma 3. Tehát az egész G gráfnak is legalább 3. ($\chi(G) \ge 3$) 4 pont

Most megmutatjuk, hogy G ki is színezhető 3 színnel. Legyen $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ színe piros és kék felváltva (páratlan i-re u_i színe piros, párosra kék) és legyen u_{11} zöld. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ színe kék és zöld felváltva (páratlan i-re v_i színe kék, párosra zöld) és legyen v_{11} piros. 4 pont

Ez egy 3-színezés, és könnyen látható, hogy a szomszédos csúcsok színe különböző. 1 pont

Tehát $\chi(G) = 3$. 1 pont

Második megoldás:

Az $u_1, u_2, \dots, u_{11}$ kör 11, vagyis páratlan sok csúcsú, ezért a kromatikus száma 3. Tehát az egész G gráfnak is legalább 3. ($\chi(G) \ge 3$) 4 pont

G-ben a maximális fokszám 3, összefüggő, de nem páratlan kör, és nem is teljes gráf, ezért a Brooks tétel alapján $\chi(G) \le 3$. 5 pont

Tehát $\chi(G) = 3$. 1 pont

3. Legyen G olyan gráf, amelyre $\tau(G) = 3$, és $\alpha(G) = 7$.
a. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \le 4$.
b. Mutassunk olyan G gráfot, amelyre $\tau(G) = 3$, $\alpha(G) = 7$, és $\chi(G) = 4$.

a. Legyen v_1, v_2, v_3 egy lefogó ponthalmaz. Ekkor a többi pont között nem fut él, vagyis független ponthalmazt alkotnak. 2 pont

Színezzük ennek a független ponthalmaznak a pontjait ugyanazzal a színnel, a v_1, v_2, v_3 pontokat pedig 3 további színnel. Ez egy jó színezése a gráfnak 4 színnel, tehát $\chi(G) \le 4$. 2 pont

b. Legyenek G pontjai $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, kössük össze a v_1, v_2, v_3, v_4 pontokat egymással, és több él ne legyen. (Vagyis G egy K_4 es 6 izolált pont uniója.) 2 pont

Ekkor nyilván $\tau(G) = \nu(G) = 3$, hiszen v_1, v_2, v_3 egy lefogó ponthalmazt alkot, viszont két ponttal nem tudjuk lefogni a K_4 éleit. 2 pont

Ugyanakkor $\alpha(G) = 7$, mert a $v_4, v_5, \ldots, v_{10}$ pontok független ponthalmazt alkotnak, viszont ha nyolc pontot veszünk, akkor legalább kettő a K_4 csúcsai közül kell hogy legyen, és ezek nem függetlenek. (De látható ez a Gallai tételből is, hiszen $\tau(G) + \alpha(G) = 10$.) 1 pont

Végül a K_4 miatt $\chi(G) \geq 4$, de négy színnel könnyen kiszínezhetjük G-t, mert a hat izolált pontot tetszőlegesen színezhetjük. (De az a. részből is következik, hogy $\chi(G) \leq 4$.) 1 pont

b. második megoldás:

Legyenek G pontjai $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, és kössünk össze minden pontot a v_1, v_2 és v_3 pontokkal. 2 pont

Ebben a G gráfban $\tau(G) = \nu(G) = 3$, hiszen v_1, v_2, v_3 egy lefogó ponthalmazt alkot, és könnyen található 3 független él. (Tehát v_1, v_2, v_3 egy *minimális* lefogó ponthalmazt alkot.) 1 pont

Ugyanakkor, a Gallai tétel szerint $\tau(G)+\alpha(G) = 10$, ezért $\alpha(G) = 7$. (Mellesleg $v_4, v_5, \ldots, v_{10}$ egy maximális független ponthalmaz.) 1 pont

Végül v_1, v_2, v_3, v_4 egy teljes négyest alkot, ezért $\chi(G) \geq 4$, de az a. rész alapján $\chi(G) \leq 4$, tehát $\chi(G) = 4$. 2 pont

4. $G(A, B; E)$ egy páros gráf, A csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$, és minden i-re ($1 \leq i \leq 100$) v_i fokszáma $d(v_i) \geq i^2$.

Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz A-t lefedő párosítást.

Be kell látnunk, hogy minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$, és akkor a Hall tétel alapján készen vagyunk. 3 pont

Legyen tehát $X \subseteq A$, $|X| = m$. Vegyük észre, hogy X biztos tartalmaz egy olyan v_i csúcsot, amelyre $i \geq m$, hiszen ellenkező esetben csak a $v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}$ csúcsokat tartalmazhatná, de ez csak $m - 1$ csúcs. 3 pont

Tehát $v_i \in X$, $i \geq m$, de ekkor v_i-nek már önmagában elég sok szomszédja van:
$|N(X)| \geq d(v_i) \geq i^2 \geq m^2 \geq m = |X|$. 3 pont

Tehát teljesül a Hall feltétel, G tartalmaz A-t lefedő párosítást. 1 pont

Második megoldás:

Sorba keresünk párt a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsoknak, ebben a sorrendben, azt állítjuk, hogy nem fogunk elakadni. 4 pont

v_1 foka legalább 1, ezért be tudjuk párosítani egy B-beli ponttal. 1 pont

Tegyük fel, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_i$ pontokat már bepárosítottuk különböző B-beli pontokkal. A feltétel szerint a v_{i+1} csúcsnak legalább $(i+1)^2$ szomszédja van, és ezek közül legfeljebb i darabot nem használhatunk, mert már be van párosítva a $v_1, v_2, \ldots, v_i$ pontokkal. De mivel $(i+1)^2 > i$, van v_{i+1}-nek olyan szomszédja, ami még nincs bepárosítva a $v_1, v_2, \ldots, v_i$ pontok egyikével sem. Párosítsuk össze v_{i+1}-et egy ilyen ponttal, és haladjunk tovább. Így kapunk egy A-t lefedő párosítást. 5 pont

5. A G gráf élösszefüggőségi száma $\lambda(G) = 3$. (G 3-élösszefüggő, de nem 4-élösszefüggő.) G egyik csúcsa v, foka $d(v) = 4$.

a. Bizonyítsuk be, hogy a $G \setminus v$ gráf összefüggő.

b. Bizonyítsuk be, hogy a $G \setminus v$ gráf nem 4-élösszefüggő.

a. Tegyük föl, hogy $G \setminus v$ nem összefüggő, hanem a G_1 és G_2 gráfok diszjunkt uniója. Tegyük vissza a v pontot. Ebből összesen 4 él indul ki, tehat vagy G_1-be, vagy G_2-be legfeljebb kettő. Feltehetjük, hogy G_1-be. 2 pont

Ezt a legfeljebb két élet elhagyva G_1-et le tudjuk választani G-ről, ami ellentmond annak, hogy $\lambda(G) = 3$. Tehát $G \setminus v$ összefüggő. 2 pont

b. Legyen e_1, e_2, e_3 három él azzal a tulajdonsággal, hogy $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ nem összefüggő. (Ilyen három él létezik, mert $\lambda(G) = 3$.) 2 pont

Tehát $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\}$ a G_1 és G_2 gráfok diszjunkt uniója. Ezek közül egyik sem állhat csak a v csúcsból, mert v foka G-ben 4, három él elvétele után sem lehet belőle izolált pont. 2 pont

Akkor viszont ha most töröljük a v csúcsot a $G \setminus \{e_1, e_2, e_3\} = G_1 \cup G_2$ gráfból, továbbra is legalább két komponens marad, tehát $G \setminus v$ élösszefüggőségi száma legfeljebb 3. 2 pont

6. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{36}$. A v_i és v_j csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha $i \cdot j$ osztható 6-tal. Határozzuk meg $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékét.

Hogy jobban megertsük, hogy mi ez a gráf, csoportositsuk a csúcsokat a következőképpen. A: a hattal osztható indexűek, $|A| = 6$. B: a kettővel igen, de hárommal nem osztható indexűek, $|B| = 12$. C: a hárommal igen, de kettővel nem osztható indexűek, $|B| = 6$. D: a se kettővel, se hárommal nem osztható indexűek, $|D| = 12$. 2 pont

Könnyen látható, hogy A csúcsai minden más csúccsal össze vannak kötve, ezenkívül minden B-beli csúcs össze van kötve minden C-beli csúccsal. Más él nincs. 2 pont

$B \cup D$ egy 24 elemű független halmazt alkot, ezért $\alpha(G) \geq 24$. 2 pont

Most vegyük a következő éleket. Minden A-beli csúcsot kössünk össze két D-beli, csupa különböző csúccsal, és minden C-beli csúcsot kössünk össze két B-beli, csupa különböző csúccsal. Ez 24 G-hez tartozo él, és lefogják az összes csúcsot. Tehát $\rho(G) \leq 24$. 2 pont

Viszont minden gráfra $\alpha \leq \rho$, vagyis $24 \leq \alpha(G) \leq \rho(G) \leq 24$, ebből pedig $\alpha(G) = \rho(G) = 24$. 2 pont

($\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\chi(G)$: G kromatikus száma.)