Kombinatorika és gráfelmélet I
1. Pót ZH, 2012. december 7. 12.15-13.45, H 406
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel llapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a felttele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jr. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \dots, v_8$ csúcsokon, amelynek pontosan három levele (1-fokú csúcsa) van? (Pontosabban: hányféleképpen húzhatunk be éleket a $v_1, v_2, \dots, v_8$ csúcsok közé, hogy a fenti tulajdonságú fát kapjunk?)

a. Mivel a Prüfer kódok egyértelműen megfelelnek a fáknak, a megfelelő Prüfer kódokat fogjuk összeszámolni. 1 pont

Tudjuk, hogy a Prüfer kódban minden csúcs a fokszámánál eggyel kevesebbszer szerepel. 1 pont

Tehát a levelek (1 fokú csúcsok) pontosan azok, amelyek nem szerepelnek a Prüfer kódban. Vagyis az olyan 6 hosszú kódokat keressük, amelyekben 5-féle csúcs szerepel. Ekkor pontosan egy közülük kétszer szerepel, a többi egyszer. 4 pont

A kimaradt három csúcsot $\binom{8}{3}$-féleképpen választhatjuk ki, ezutan a kétszer szereplő csúcsot 5-féleképpen. Végül ezekből $6!/2$-féle kódot alkothatunk (ismétléses permutáció). 3 pont

Tehát a válasz $5\binom{8}{3}6!/2 = 100800$. 1 pont

2. A 39 csúcsú G gráf egy 19 csúcsú teljes gráf és egy 20 csúcsú teljes gráf diszjunkt uniója. Minimálisan hány élt kell behúzni G-be, hogy a kapott gráf egyszerű legyen, és legyen Euler köre?

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler kör, ha az izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden csúcs foka páros. 1 pont

Itt 20 csúcs foka 19, 19 csúcs foka 18. Tehát 20 páratlan fokú csúcs van. 1 pont

Ezek mindegyikéhez kell húzni legalább egy élet. Ezek az élek mind különbözőek, mert a 20 darab 19 fokú csúcs már eredetileg is teljes gráfot alkot, és a kapott gráf egyszerű kell hogy legyen. Tehát legalább 20 élet be kell húznunk. 5 pont

20 él viszont elég is, kössük össze a 19 csúcsú teljes gráf egyik csúcsát a 20 pontú teljes gráf összes csúcsával. A kapott gráf egyszerű, összefüggő, és minden fok páros, tehát van Euler köre. 3 pont

3. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_n$, bármely két csúcs össze van kötve, kivéve a v_1 és v_2 csúcsok egymással. Hány különböző Hamilton útja van G-nek?

Összeszámoljuk a teljes gráf Hamilton útjainak a számát, és levonjuk belőle azokat, amelyek használják a v_1v_2 élet. 1 pont

A teljes gráfnak összesen $n!/2$ darab Hamilton útja van, mert a csúcsok $n!$ sorrendben követhetik egymást, de így minden Hamilton utat kétszer számoltunk. 3 pont

Azok a Hamilton utak, amelyek használják a v_1v_2 élet, olyanok, hogy a megfeleő permutációban v_1 és v_2 egymás mellett vannak. Az ilyen permutációkat a következő módon kaphatjuk meg. Vegyük a $[v_1, v_2]$, v_3, …, v_n, $n-1$ darab karakter összes permutációját, majd helyettesítsük mindegyikben a $[v_1, v_2]$ karaktert v_1v_2-vel, illetve v_2v_1-vel. 3 pont

Ezért $2(n-1)!$ ilyen permutáció van, és így minden megfelelő Hamilton utat kétszer számoltunk. 2 pont

Tehát az olyan Hamilton utak száma, ahol v_1 és v_2 *nincsenek* egymás mellett, $n!/2 - (n-1)!$. 1 pont

4. A $2n$ csúcsú G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Minden $i \neq j$-re, ahol $1 \leq i, j \leq n$, a v_iv_j élek súlya 2, az u_iu_j élek súlya 4. Az összes többi él súlya x, vagyis minden i, j-re, ahol $1 \leq i, j \leq n$, az u_iv_j élek súlya x. Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa súlyát

a. $x = 1$-re,

b. $x = 3$-ra,

c. $x = 5$-re.

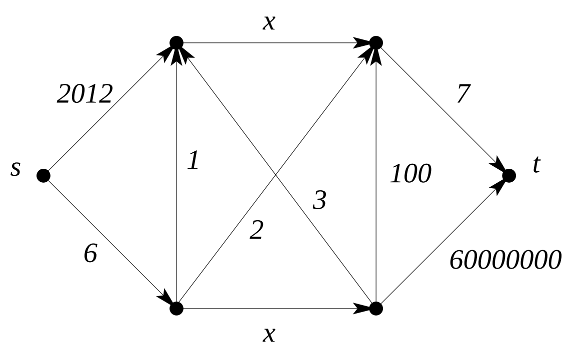
Mindhárom esetben nézzük meg, mit adna a mohó algoritmus, mert az biztos egy minimális összsúlyú feszítőfát ad. 1 pont

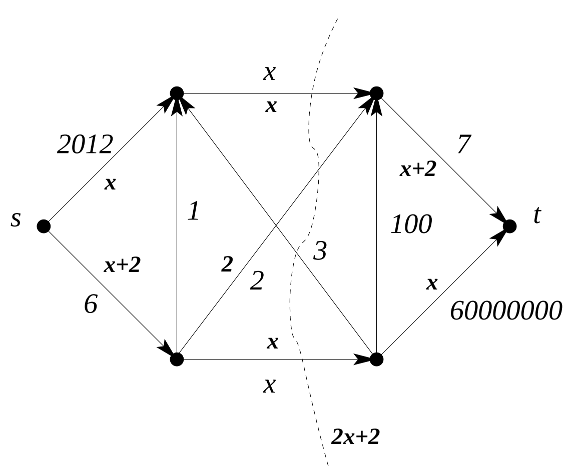
a. $x = 1$-re amíg lehet, az 1 súlyú éleket fogjuk választani, márpedig ezekből össze is jön egy feszítőfa. (Például kössünk össze minden v_i-t u_1-gyel, és minden u_i-t v_1-gyel.) Ennek a fának $2n - 1$ éle van, tehát a súlya $2n - 1$. 3 pont

b. $x = 3$-ra amíg lehet, a 2 súlyú éleket fogjuk választani, vagyis találunk egy feszítőfát a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon. Ezután a 3 súlyú éleket választjuk, és így már meg is van a feszítőfa, $n - 1$ darab 2 súlyú él és n darab 3 súlyú él, az összsúly $2(n - 1) + 3n = 5n - 2$. 3 pont

c. Végül $x = 5$-re amíg lehet, a 2 súlyú éleket fogjuk választani, vagyis találunk egy feszítőfát a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon. Ezután amílehet, a 4 súlyú éleket fogjuk választani, vagyis találunk egy feszítőfát az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokon. Végül még választunk egy 5 súlyú élt, és kész vagyunk. Az összsúly $2(n - 1) + 4(n - 1) + 5 = 6n - 1$. 3 pont

5. Határozzuk meg az összes olyan x számot, amelyre az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága 8.





A második ábrán látható egy $2x+2$ értékű vágás. Tehát ha a maximális folyam nagysága 8, akkor $2x+2 \geq 8$, így $x \geq 3$. 3 pont

Ugyancsak az ábrán látható egy $2x+2$ nagyságú folyam, ha $x \leq 4$. Ebből az következik, hogy ha $3 < x \leq 4$, akkor a maximális folyam nagysága több mint 8. 3 pont

Ha pedig tovább növeljük x-et, attól nem csökkenhet a maximális folyam nagysága, tehát több marad, mint 8. 3 pont

Összefoglalva, ha a maximális folyam nagysága 8, akkor $x = 3$. 1 pont

6. A G gráfnak 1000 csúcsa van, és minden csúcs foka legalább 600.
a. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz legalább 51 éldiszjunkt Hamilton kört.
b. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz legalább 101 különböző Hamilton kört.

a. A Dirac tétel szerint ha egy 1000 csúcsú gráfban minden fokszám legalább 500, akkor a gráf tartalmaz Hamilton kört. 1 pont

Tehát az eredeti G gráf tartalmaz Hamilton kört. Hagyjuk el ennek a Hamilton körnek az éleit, így minden fokszám kettővel csökkent, tehát tovabbra is van egy Hamilton kör. 2 pont

Ezt 50-szer megismételhetjük, az 50-edik Hamilton kör éleinek elhagyása után is még minden fokszám legalább 500, tehát még utoljára alkalmazhatjuk a Dirac tételt, és találhatunk egy 51-ik Hamilton kört, és ezek mind éldiszjunktak. 2 pont

b. Megint alkalmazva a Dirac tételt az eredeti gráfra, található egy Hamilton kör. Hagyjuk el most ennek egyetlen egy élét. Ezzel két fokszám eggyel csökkent, a többi nem változott. Tehát megint van egy Hamilton kör. 3 pont

Ezt 100-szor megismételhetjük, az 100-adik Hamilton kör egy élének elhagyása után is még minden fokszám legalább 500, tehát még utoljára alkalmazhatjuk a Dirac tételt, és találhatunk egy 101-ik Hamilton kört, és ezek mind különbözőek. 2 pont