

Kombinatorika és gráfelmélet I  
**1. PótZH**, 2016. május 17, 12.15-13.45, H 405  
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végig gondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismerttetektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, rész megoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibáknént) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a  $v_1, v_2, \dots, v_n$  csúcsokon, ( $n \geq 4$ ) amelyben a  $v_1$  és  $v_2$  csúcsoknak nincs közös szomszédja és  $d_1 + d_2 = 2$ ? ( $d_i$  a  $v_i$  csúcs fokszáma)

Mivel egy fában nincs izolált pont,  $d_i \geq 1$ , tehát  $d_1 = d_2 = 1$ , vagyis  $v_1$  és  $v_2$  levelek. 1 pont

Ezért ha elhagyjuk az eredeti  $F$  fából a  $v_1$  és  $v_2$  csúcsokat, akkor egy  $F'$  fát kapunk a  $v_3, v_4, \dots, v_n$  csúcsokon. 2 pont

Mivel a  $v_1$  és  $v_2$  csúcsoknak nincs közös szomszédja,  $v_1$  és  $v_2$   $F'$  két különböző csúcsához illeszkedik. 2 pont

Tehát a következő módon állíthatjuk elő a feltételeket kielégítő  $F$  fákat: veszünk egy  $F'$  fát a  $v_3, v_4, \dots, v_n$  csúcsokon, erre a Cayley tétel szerint  $(n-2)^{n-4}$  lehetőségünk van, 2 pont

egy tetszőleges csúcsához illesztjük a  $v_1$  csúcsot, mint levelet, ezt  $(n-2)$ -féleképpen tehetjük meg, 1 pont

végül egy másik csúcsához illesztjük a  $v_2$  csúcsot, mint levelet, ezt  $(n-3)$ -féleképpen tehetjük meg. 1 pont

Így az összes megfelelő fát előállítottuk pontosan egyszer, tehát a válasz  $(n-2)^{n-3}(n-3)$ . 1 pont

2. A 3000 csúcsú  $G$  gráf 1000 darab diszjunkt háromszögből áll. Minimálisan hány élet kell hozzáadni  $G$ -hez, hogy legyen Euler köre (körsétája)?

Egy gráfnak akkor és csak akkor van Euler köre (körsétája), ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fok páros. Jelenleg minden fok páros, viszont a gráf nem összefüggő, hanem 1000 komponense van. 2 pont

Tehát minden komponensből ki kell indulnia egy új élnek. 1 pont

De ha csak egy új él indulna ki egy komponensből (háromszögből), akkor valamelyik csúcsának a foka 3 lenne, ami nem jó. Ezért legalább 2 új él indul ki minden komponensből. Tehát összesen az 1000 komponensből legalább 2000 él indul ki. Így minden élet kétszer számoltunk, vagyis azt kaptuk, hogy legalább 1000 élet kell behúznunk. 3 pont

Viszont 1000 alkalmas él behúzása elég is. Jelöljük ki mindegyik háromszögnek egy pontját, és vegyünk ezeken a pontokon keresztül egy kört. Ez éppen 1000 élből áll, és ezeket az éleket hozzáadva  $G$ -hez a gráf összefüggő és minden fok páros tehát van Euler köre (körsétája). Tehát a válasz 1000. 4 pont

3. A  $G$  gráfnak legalább 5 csúcsa van, és bárhogy elhagyunk két csúcsot  $G$ -ből, a megmaradt gráfnak van Hamilton köre. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben van Hamilton út.

Először belátjuk, hogy  $G$  összefüggő. Tegyük fel, hogy nem az, vegyünk két csúcsot  $u$ -t és  $v$ -t két különböző komponensben, és hagyjunk el két ezektől különböző csúcsot. A kapott  $G'$  gráfban  $u$  és  $v$  továbbra is különböző komponensben van, tehát  $G'$ -nek nem lehet Hamilton köre, ami ellentmond a feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy  $G$  összefüggő. 5 pont

Most akkor hagyjunk el  $G$ -ből két összekötött csúcsot,  $x$ -et és  $y$ -t. A feltétel szerint a maradék  $G''$  gráfban van Hamilton kör. Mivel  $G$  összefüggő,  $x$  vagy  $y$  össze van kötve  $G''$  valamelyik csúcsával, mondjuk  $z$ -vel. Feltehetjük, hogy ez  $x$ . Ekkor viszont az  $y, x, z$  út és  $G''$  Hamilton körének megfelelő része (egy  $z$ -vel kezdődő Hamilton út) együtt éppen  $G$  Hamilton útját adják. 5 pont

4. A  $G$  teljes gráf gráf csúcsai  $u_1, \dots, u_{20}$  és  $v_1, \dots, v_{30}$ . Az  $u_i u_j$  élek súlya 1, a  $v_i v_j$  élek súlya 2, az összes többi  $(u_i v_j)$  él súlya 4.

- Mekkora a minimális összsúlyú feszítőfa összsúlya?
- Hány minimális összsúlyú feszítőfa van  $G$ -ben?

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus megtalálja az összes minimális feszítőfát. Tehát nézzük meg, hogyan futhat a mohó algoritmus. 1 pont

Először az 1 súlyú éleket választja, amíg lehet, vagyis kiválaszt egy feszítőfát az  $u_1, \dots, u_{20}$  csúcsokon. 2 pont

Utána a 2 súlyú éleket választja, amíg lehet, vagyis kiválaszt egy feszítőfát a  $v_1, \dots, v_{30}$  csúcsokon. 1 pont

Végül jönnek a 4 súlyú élek, de abból elég egy, ezzel összekötöttük a két fát. 2 pont

Tehát a minimális összsúlyú feszítőfa összsúlya  $1 \cdot 19 + 2 \cdot 29 + 4 = 81$ . 2 pont

Hány ilyen van? A Cayley tétel szerint az  $u_1, \dots, u_{20}$  csúcsokon  $20^{18}$ , a  $v_1, \dots, v_{30}$  csúcsokon  $30^{28}$  különböző fát választhatunk, a 3 súlyú összekötő éleket pedig  $20 \cdot 30$  féleképpen választhatjuk. Tehát a válasz  $20^{18} \cdot 30^{28} \cdot 20 \cdot 30 = 20^{19} \cdot 30^{29}$ . 2 pont

5. A  $(G, s, t, c)$  hálózatban az egyik él,  $e$  kapacitása  $c(e) = x$ . A többi él kapacitása állandó, nem függ  $x$ -től. Legyen  $M(x)$  a maximális folyam nagysága  $x$  függvényében. Tudjuk, hogy  $M(0) = 1$ ,  $M(1) = 2$ ,  $M(3) = 3$ ,  $M(4) = 3$ . Határozzuk meg  $M(2)$  értékét.

Az  $e$  élet *nem* tartalmazó vágások kapacitása nyilván nem függ  $x$ -től, legyen ezek közül a minimális  $c$ . Az  $e$  élet tartalmazó vágások kapacitása  $d' + x$ , valamilyen  $d'$ -re, legyen ezek közül a minimális  $d + x$ . Ekkor minden  $x$ -re  $M(x) = \min\{c, d + x\}$ ,  $c, d \geq 0$ . 4 pont

Legyen  $x = 4$ . Nyilván  $d + 4 \geq 4$ , tehát ha  $M(4) = 3$ , akkor  $c = 3$ . 2 pont

Most legyen  $x = 0$ . Mivel  $c = 3$ , ha  $M(0) = 1$ , akkor  $d = 1$ . 2 pont

Tehát  $M(x) = \min\{3, 1 + x\}$ . Behelyettesítve  $M(2) = \min\{3, 1 + 2\} = 3$ . 2 pont

6. Határozzuk meg az olyan 5 csúcsú egyszerű  $G$  gráfok élszámának a maximumát, amelyeknek a pontösszefüggőségi száma,  $\kappa(G) = 1$ .

Mivel  $\kappa(G) = 1$ ,  $G$ -nek van elvágó pontja,  $v$ . 2 pont

Legyenek  $G$  komponensei  $K_1, \dots, K_m$   $v$  elhagyása után. Mivel az élek számát maximalizálni akarjuk, behúzzhatjuk  $G$ -be az összes éleket  $K_2, \dots, K_m$  között,  $v$  így is elvágó pont marad. Vagyis feltehetjük, hogy csak két komponens van,  $m = 2$ . 3 pont

Sőt, behúzzhatjuk a komponenseken belüli összes éleket és az összes éleket ami  $v$ -re illeszkedik. 3 pont

Feltehetjük, hogy  $|K_1| \geq |K_2|$ . Két lehetőségünk van:  $|K_1| = 3$ ,  $|K_2| = 1$ , illetve  $|K_1| = 2$ ,  $|K_2| = 2$ . Az első esetben  $\binom{4}{2} + 1 = 7$ , a második esetben  $2 \binom{3}{2} = 6$  élünk van, tehát a válasz 7. 2 pont