Kombinatorika és gráfelmélet I

1. PótZH, 2014. december 12. 8.15-9.45, J 209

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a felttele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének vgiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a megfelelő részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóban szereplő pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokon, amelyben $d_1 + d_2 = 30$? (d_i a v_i csúcs foka)

Tudjuk, hogy az $n-2$ (jelen esetben 98) hosszú Prüfer kódok egyértelműen meghatározzák a fákat a $v_1, v_2, \ldots,$ v_{100} csúcsokon és a Prüfer kódban minden csúcs sorszáma eggyel kevesebbszer szerepel, mint amennyi a fokszáma. 2 pont

Mivel $d_1 + d_2 = 30$, ezért az 1 és 2 *összesen* pontosan 28-szor szerepel a a Prüfer kódban. 3 pont

Tehát azokat a 98 hosszú sorozatokat kell leszámolnunk, amelyeknek minden tagja egy 1 és 100 közti egész szám és az 1 és 2 összesen pontosan 28-szor szerepel benne. 2 pont

Az 1-esek és 2-esek helyét $\binom{98}{28}$-féleképpen választhatjuk ki, az adott 28 hely mindegyikén 2 lehetőségünk van, 1-et vagy 2-t írhatunk oda, a többi 70 hely mindegyikén pedig 98 lehetőségünk van, a $3, \ldots, 100$ számok közül választhatunk. 2 pont

Tehát a válasz $\binom{98}{28} \cdot 2^{28} \cdot 98^{70}$. 1 pont

2. A G egyszerű gráfnak 100 csúcsa van és bármely két csúcs fokszámának az összege legalább 99. Azt is tudjuk, hogy G-nek van Euler köre. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton köre is.

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler kör, ha izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fokszáma páros. 1 pont

Tehát G-ben minden csúcs fokszáma páros. 1 pont

Mivel bármely két csúcs fokszámának az összege legalább 99 és minden fokszám páros, az is igaz, hogy bármely két csúcs fokszámának az összege legalább 100. 4 pont

Akkor viszont alkalmazhatjuk az Ore tételt, ennek alapján G-nek van Hamilton köre. 4 pont

3. Legyen $n \geq 3$. A $2n$ csúcsú G egyszerű gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és $u_1, u_2, \ldots, u_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsok között minden él be van húzva, és az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsok között is minden él be van húzva. Ezen kívül össze van kötve v_1 u_1-gyel, v_1 u_2-vel, v_2 u_1-gyel és v_2 u_2-vel. Hány különböző Hamilton köre van G-nek? (Két Hamilton kör különböző, ha legalább egy élben különböznek.)

Egy tetszőleges Hamilton körnek legalább két olyan éle van, amelynek egyik vége a $v_1, v_2, \ldots, v_n$, másik vége az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsok között van. (Vagyis egy tetszőleges Hamilton körnek át kell mennie a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsoktól az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokhoz, és vissza is kell mennie.) 2 pont

Mivel csak a v_1 és v_2 csúcsokon és az u_1 és u_2 csúcsokon keresztül lehet eljutni a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsoktól az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokhoz, összesen két lehetőségünk van:

1. a Hamilton kör a v_1 csúcsból indulva végígmegy a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, úgy, hogy az utolsó a v_2, onnan átmegy az u_2-be, és vegígmegy az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokon, úgy, hogy az utolsó az u_1, onnan pedig visszamegy a v_1-be.

2. a Hamilton kör a v_1 csúcsból indulva végígmegy a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, úgy, hogy az utolsó a v_2, onnan átmegy az u_1-be, és vegígmegy az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokon, úgy, hogy az utolsó az u_2, onnan pedig visszamegy a v_1-be. 3 pont

A $v_1, v_2, \dots, v_n$ csúcsokon $(n-2)!$-féleképpen lehet a feltételeknek megfelelően végigmenni, és az $u_1, u_2, \dots, u_n$ csúcsokon is. 3 pont

Tehát G-nek $2(n-2)!^2$ Hamilton köre van. 2 pont

4. A K_n teljes n csúcsú gráf ($n \geq 3$) élein pozitív súlyok vannak, e egy rögzített él, végpontjai u és v. Tudjuk, hogy minden u-ra illeszkedő, e-től különböző élnek nagyobb a súlya mint e-nek.

Bizonyítsuk be, hogy e az összes minimális feszítőfában benne van.

Tegyük fel, hogy F egy minimális feszítőfa és $e \notin F$. Az $F \cup \{e\}$ gráf tartalmaz egy C kört, $e \in C$. 2 pont

Sőt, van olyan u-ra illeszkedő, e-től különböző f él, amelyre $f \in C$. 3 pont

Legyen $F' = F \cup \{e\} \setminus \{f\}$. Vagyis hagyjuk el f-et F-ből, és tegyük be helyette e-t. 2 pont

A feltétel szerint f súlya nagyobb, mint e súlya, ezért F súlya is nagyobb, mint F' súlya, ami ellentmond annak a feltételnek, hogy F egy minimális feszítőfa. 2 pont

Ezért e az összes minimális feszítőfában benne van. 1 pont

5. Legyen $G(s, t, c)$ egy hálózat, amelyben a maximális folyam nagysága 100. Legyen G egyik csúcsa v, amely se s-sel, se t-vel nincs összekötve.

Adjuk hozzá G-hez az $\vec{sv}$ élet 5 kapacitással, ebben a hálózatban a maximális folyam nagysága 103.

Most adjuk hozzá G-hez az $\vec{vt}$ élet 5 kapacitással. (De az $\vec{sv}$ élet nem!) Mennyi a maximális folyam nagysága ebben a hálózatban?

Nevezzük 1-es típusú vágásnak az olyan (S, T) vágásokat, ahol $s \in S$, $t \in T$ és $v \in S$, 2-es típusú vágásnak pedig az olyan (S, T) vágásokat, ahol $s \in S$, $t \in T$ és $v \in T$. Legyen c_1 az 1-es típusú vágások, c_2 a 2-es típusú vágások minimális kapacitása G-ben.

A felételek és a Ford-Fulkerson tétel alapján szerint $\min(c_1, c_2) = 100 \quad (1)$. 2 pont

A $\vec{sv}$ él hozzáadása az 1-es típusú vágások kapacitását 5-tel növeli, a 2-es típusú vágások kapacitását nem változtatja. 2 pont

Tehát $\min(c_1 + 5, c_2) = 103 \quad (2)$. 2 pont

Viszont akkor (1) alapján $c_1 \geq 100$, tehát $c_1 + 5 \geq 105$, ezért (2) miatt $c_2 = 103$. Ekkor megint (1) alapján $c_1 = 100$. 3 pont

Most adjuk hozzá G-hez az $\vec{vt}$ élet 5 kapacitással. (De az $\vec{sv}$ élet nem.) Ekkor az 1-es típusú vágások kapacitását nem változtattuk, a 2-es típusú vágások kapacitását 5-tel növeltük, a maximális folyam nagysága tehát $\min(c_1, c_2 + 5) = \min(100, 108) = 100$. 1 pont

6. A G teljes gráf csúcsai $u_1, u_2, \dots, u_{10}$, $v_1, v_2, \dots, v_{20}$ és $w_1, w_2, \dots, w_{30}$. Az u_iu_j élek súlya 10, a v_iv_j élek súlya 20, a w_iw_j élek súlya 30. Az összes többi él súlya 40. Hány minimális összsúlyú feszítőfája van G–nek?

Tudjuk, hogy a mohó algoritmus előállítja az összes minimális összsúlyú feszítőfát. Itt a mohó algoritmus kiválasztana egy feszítőfát az $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ csúcsokon, egy másik feszítőfát a $v_1, v_2, \dots, v_{20}$ csúcsokon, egy harmadikat a $w_1, w_2, \dots, w_{30}$ csúcsokon, majd két 40 súlyú éllel összeköti őket. 3 pont

Meg kell számolnunk, hogy hány ilyen fa van. A Cayley tétel alapján az $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ csúcsokon 10^8 feszítőfa van, a $v_1, v_2, \dots, v_{20}$ csúcsokon 20^{18}, $w_1, w_2, \dots, w_{30}$ csúcsokon 30^{28}. 3 pont

A három fát három módon köthetjük össze. 1. Egy uv (u_iv_j) él és egy uw él, 2. egy uv él és egy vw él, 3. egy uw él és egy vw él. Az első típusból $10 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 30$ lehetőség van, a másodikból $10 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 30$, a harmadikból $10 \cdot 30 \cdot 20 \cdot 30$, ez összesen 360000. 3 pont

Tehát $360000 \cdot 10^8 \cdot 20^{18} \cdot 30^{28}$ darab minimális összsúlyú feszítőfája van G–nek. 1 pont