Kombinatorika és gráfelmélet I
1. ZH, 2012. okt. 27. 14.15-15.45, K 134
Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. a. Egy 8 csúcsú fában öt csúcs foka 1, egy csúcs foka 2, és egy csúcs foka 3. Mennyi a nyolcadik csúcs foka?

b. Hány ilyen fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_8$ csúcsokon? (Hányfeleképpen húzhatunk be éleket a $v_1, v_2, \ldots, v_8$ csúcsok közé, hogy a fenti tulajdonságú fát kapjunk?)

a. Egy 8 csúcsú fának 7 éle van. 1 pont

Azt is tudjuk, hogy minden gráfban a fokszámok összege éppen az élek számának a kétszerese. 1 pont

Legyen d a nyolcadik csúcs foka. Ekkor tehát $5 + 2 + 3 + d = 14$, vagyis $d = 4$. 1 pont

b. Elég a megfelelő fák Prüfer kódjait összeszámolni, ezek egyértelműen meghatározzák a fákat. A feltételeknek megfelelő fa Prüfer kódja 6 hosszú, és minden csúcs sorszáma eggyel kevesebbszer szerepel benne, mint a foka. 2 pont

Tehát az olyan 6 hosszú számsorozatokat akarjuk összeszámolni, amelyben minden szám 1 és 8 között van, valamelyik szám egyszer, valamelyik kétszer, és valamelyik háromszor szerepel benne. Ez megadja a kérdéses fák számát is. 2 pont

Az egyszer szereplő számot 8 féleképpen választhatjuk ki, a kétszer szereplőt ezutan 7 féleképpen, végül a háromszor szereplőt 6 féleképpen. Ezekből pedig $6!/(2!3!)$ féle számsorozatot alkothatunk (ismétléses permutáció). 2 pont

Tehát a válasz $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6!/(2!3!) = 8!/2 = 2880$. 1 pont

2. A 100 csúcsú G gráf két 50 hosszú kör diszjunkt uniója. Minimálisan hány élt kell behúzni G-be, hogy a kapott gráf egyszerű legyen, és legyen Euler köre?

Egy gráfnak akkor és csak akkor van Euler köre, ha az izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden csúcs foka páros. 1 pont

A mi gráfunkban minden fok páros, de nem összefüggő. Tegyük fel hogy csak két új élt húzunk be. Mivel a gráfnak egyszerűnek kell maradnia, ez a két él nem lehet párhuzamos, tehát valamelyik csúcsnak pontosan eggyel nő a fokszáma. Vagyis lesz páratlan fokú csúcs, tehát nem lesz Euler kör. 4 pont

Most vegyünk egy u csúcsot az egyik körről, és a v, w nem szomszédos csúcsokat a másikról, és húzzuk be az uv, uw, vw éleket. A kapott gráf egyszerű, u, v és w foka 4, a többié 2, tehat van Euler köre. 4 pont

Tehát a válasz 3. 1 pont

3. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokról tudjuk, hogy mindegyiknek a foka legalább $n/2$. (Sajnos a v_n csúcsról ezt nem tudjuk.) Bizonyítsuk be, hogy van egy út G-ben a $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokon.

Kössük össze G-ben a v_n csúcsot az összes többi csúccsal, legyen a kapott gráf G'. 1 pont

A G' gráfban minden csúcs foka legalább $n/2$, hiszen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ foka már eredetileg is legalább $n/2$ volt, a v_n csúcs foka pedig $n - 1$. 3 pont

Tehát a Dirac tétel szerint G' tartalmaz Hamilton kört. 3 pont

Ennek a Hamilton körnek minden éle benne van G-ben is, kivéve esetleg a v_n-re illeszkedő két élt. Ha pedig ezeket elhagyjuk, akkor éppen egy utat kapunk a $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ csúcsokon. 3 pont

4. A $2n$ csúcsú G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$ és $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Minden $i \neq j$-re, ahol $1 \leq i, j \leq n$, a $v_i v_j$ és az $u_i u_j$ élek súlya x, és minden i, j-re, ahol $1 \leq i, j \leq n$, a $v_i u_j$ élek súlya 3.

Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa súlyát

a. $x = 1$-re,

b. $x = 4$-re,

c. x függvényében.

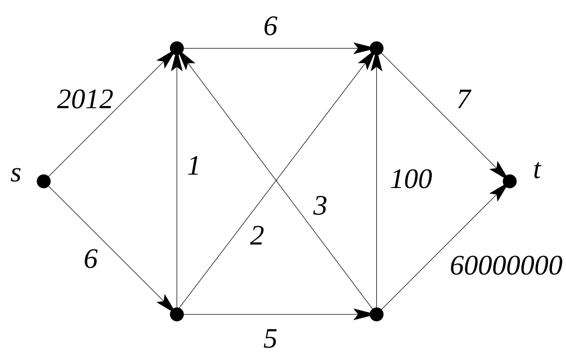
Tudjuk, hogy a mohó algoritmus ad egy minimális összsúlyú feszítőfát, ezért mindegyik esetben ezt fogjuk használni. 2 pont

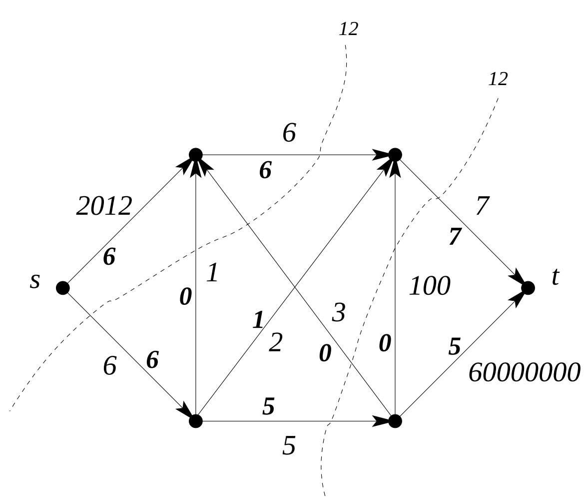
a. Ha $x = 1$, akkor az algoritmus az 1 súlyú éleket fogja választani, amíg lehetséges. Tehát egy feszítőfát fogunk kapni az $u_1, u_2, \ldots, u_n$ csúcsokon, egy másik feszítőfát a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, es egy 3 súlyú élt, ami összeköti őket. Ennek a fának a súlya $2(n-1) + 3 = 2n + 1$. 2 pont

b. Ha $x = 4$, akkor az algoritmus a 3 súlyú éleket fogja választani, ezekből kapunk egy feszítőfát. (Tehát 4 súlyú élt nem is kell választani.) Ennek a súlya $3(2n-1) = 6n - 3$. 2 pont

c. Ha $x \leq 3$, akkor az algoritmus ugyanazokat az éleket választja (választhatja), mint $x = 1$ esetén, tehát a minimális összsúlyú feszítőfa súlya $2x(n-1) + 3 = 2xn - 2x + 3$. 2 pont

Ha pedig $x \geq 3$, akkor az algoritmus ugyanazokat az éleket választja (választhatja), mint $x = 4$ esetén, tehát a minimális összsúlyú feszítőfa súlya $3(2n-1) = 6n - 3$. 2 pont





5. a. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi hálózatban a maximális folyam nagysága 12.

b. El lehet érni egyetlen él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 13 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)

c. El lehet érni két él kapacitásának a megváltoztatásával, hogy a maximális folyam nagysága 14 legyen? (Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?)

a. Az ábrán látható egy 12 nagyságú folyam (vastag számokkal) és egy (sőt! kettő!) 12 értékű vágás. Ez bizonyítja hogy a maximális folyam nagysága 12. 3 pont

b. Az ábrán látható két 12 értékű vágás, amelyeknek nincs közös éle. Tehát ha csak egy él kapacitását valtoztathatjuk meg, akkor legalább az egyik 12 értékű vágás megmarad, vagyis nem lehet a maximális folyam értéke 13. 4 pont

c. Két él kapacitásának a megváltoztatásával könnyedén elérhetjuk, hogy a maximális folyam értéke 14 legyen, például növeljük meg a fölső 6 és 7 kapacitású élek kapacitását, 2-vel. Így az ábrán látható folyamot kettővel növelhetjük a fölső három élen. 3 pont

6. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$. A v_i és v_j csúcsok ($i \neq j$) akkor és csak akkor vannak összekötve, ha ij páros. Hány különböző Hamilton kör van G-ben?

A páratlan indexű csúcsoknak csak a páros indexű csúcsok a szomszédaik, tehát a Hamilton körön minden páratlan indexű csúcs előtt és után egy páros indexű csúcs van. 3 pont

Mivel páros és páratlan indexű csúcsból egyaránt 50 darab van, ez csak úgy lehetséges, hogy a Hamilton körön felváltva vannak a páros és páratlan indexű csúcsok. 2 pont

A körön valahol szerepel a v_1 csúcs. Ezt 50! lehetséges sorrendben követhetik a páros indexű csúcsok, és 49! lehetséges sorrendben a páratlan indexű csúcsok. Ezzel minden Hamilton kört pontosan kétszer kaptunk meg, mert egy köron kétféle irányban mehetünk körbe. 4 pont

Tehát a válasz $50! \cdot 49!/2 = 25 \cdot 49!^2$. 1 pont