Kombinatorika és gráfelmélet I

1. ZH, 2024. április 19. 8.15-9.45, E 505.

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor megfelelő részpontszám jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő de helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_{100}$ csúcsokon, azzal a tulajdonsággal, hogy $d_1 + d_2 = 3$? (d_i a v_i csúcs fokszáma)

A fát egyértelműen meghatározza a Prüfer kódja, ami ebben az esetben 98 hosszú. A Prüfer kódban minden v_i csúcs sorszáma $d_i - 1$-szer szerepel. Mivel $d_1 + d_2 = 3$, $(d_1 - 1) + (d_2 - 1) = 1$, vagyis az 1 és 2 *összesen* 1-szer szerepel. 5 pont

Számoljuk meg, hány ilyen kód van. Az az egy hely, ahol az 1 vagy 2 van, 98-féle lehet és itt két választásunk van, 1 vagy 2. 2 pont

A többi 97 hely mindegyikén bármi lehet, kivéve 1 és 2. Ez 98^{97} lehetőség. 2 pont

Tehát a válasz $2 \cdot 98 \cdot 98^{97} = 2 \cdot 98^{98}$. 1 pont

2. A 100 csúcsú G egyszerű gráfban minden csúcs foka legalább 51 Bizonyítsuk be, hogy bármely 98 csúcshoz van olyan kör, amely azokat tartalmazza, de a kimaradt 2 csúcsot nem.

Legyen $S \subset V(G)$ egy tetszőleges 98 csúcsból álló halmaz. Hagyjuk el az S-en kívüli 2 csúcsot G-ből, a kapott gráf legyen $G(S)$. 3 pont

Minden $v \in S$ csúcsnak legfeljebb 2-vel csökkent a fokszáma, tehát $G(S)$-ben minden csúcs fokszáma legalább 49. 4 pont

Viszont $G(S)$-nek 98 csúcsa van, tehát alkalmazhatjuk a Dirac tételt, ennek alapján $G(S)$-nek van Hamilton köre, ami épp megfelel a feltételeknek. 3 pont

3. A G teljes gráf csúcsai $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ és $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$. Az u_iu_j élek súlya 10, a v_iv_j élek súlya 20, az u_iv_j élek súlya x. Határozzuk meg a minimális összsúlyú feszítőfa $s(x)$ súlyát x függvényében ($x \geq 0$, valós).

Legyen $s(x)$ a keresett függvény. Tudjuk, hogy a mohó algoritmus talál egy (igazaból az összes) minimális összsúlyú feszítőfát. Ugyhogy nézzük meg, hogy milyen x értékekre hogy fut. 4 pont

Tegyük fel, hogy $0 \leq x \leq 10$. Ekkor a mohó algoritmus az x súlyú élekből épít egy feszítőfát. ($x = 10$ esetén epítHET) Ennek 19 éle van, tehát ebben az esetben $s(x) = 19x$. 2 pont

Most legyen $10 \leq x \leq 20$. Ekkor először a 10 súlyú élekből épít egy feszítőfát az $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ csúcsokon, majd az x súlyú élek segítségével kiegészíti G egy minimális feszítőfájává ($x = 10$ illetve $x = 20$ esetén van más lehetőség is). Ennek a fának a súlya $s(x) = 9 \cdot 10 + 10x = 10x + 90$. 2 pont

Végül ha $x \geq 20$, akkor először a 10 súlyú élekből épít egy feszítőfát az $u_1, u_2, \ldots, u_{10}$ csúcsokon, majd a 20 súlyú élekből épít egy feszítőfát az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ csúcsokon, végül összeköti a két fát egy x súlyú éllel. (ismét, $x = 20$ esetén más lehetőség is van). Ennek a fának a súlya $s(x) = 9 \cdot 10 + 9 \cdot 20 + x = x + 270$. 2 pont

4. A (G, s, t, c) hálózatban minden e élre $c(e) > 0$ egész. A maximális folyam nagysága $M = 2024$. Legyen M' a $(G, s, t, c + 1)$ (minden él kapacitását megnöveljük 1-gyel) hálózatban a maximális folyam nagysága. Határozzuk meg M' lehetséges értékeit.

Mivel a $(G, s, t, c + 1)$ hálózatban minden kapacitás egész, M' is egész. 1 pont

Tekintsük (G,s,t,c) egyik 3 kapacitású vágását. Ez legfeljebb 3 élből áll, ezért $(G,s,t,c+1)$-ben a kapacitása legfeljebb 6, vagyis $M' \leq 6$. 3 pont

Ugyanakkor minden vágás kapacitása nőtt legalább eggyel, ezért $M' \geq 4$. 3 pont

Azt állítjuk, hogy M' lehet is 4, 5 és 6. Legyen a (G,s,t,c) hálózat mindössze egy st él, amelynek 3 a kapacitása, ekkor $M' = 4$. Most legyen két párhuzamos st él, 1 és 2 kapacitással. (Párhuzamos él helyett vehetünk utakat is.) Ekkor $M' = 5$. Végül vegyünk 3 párhuzamos st élt, 1 kapacitással. Ekkor $M' = 6$. Tehát M' lehetséges értékei 4, 5 és 6. 3 pont

5. Határozzuk meg, hogy maximálisan hány éle lehet egy 6 csúcsú egyszerű gráfnak, ha élösszefüggőségi száma $\lambda(G) = 2$.

A gráfunknak van két éle, e_1 és e_2, amelyeket elhagyva G szétesik két komponensre. 3 pont

Mivel maximalizálni akarjuk az élek számát, be kell vennünk az összes élt a komponenseken belül. 3 pont

Három lehetőség van a komponensek méretére. a) 1 és 5 csúcs, ekkor G-nek $2 + \binom{5}{2} = 12$ éle van, b) 2 és 4 csúcs, ekkor G-nek $2 + 1 + \binom{4}{2} = 9$ éle van, c) 3 és 3 csúcs, ekkor G-nek $2 + 2\binom{3}{2} = 8$ éle van. 3 pont

Tehát az élek maximális száma 12. 1 pont

6. Adott egy 10 csúcsú és 20 élű egyszerű páros gráf. Bizonyítsuk be, hogy $\nu(G) \geq 3$.

Tegyük fel, hogy $\nu(G) \leq 2$. Mivel G páros gráf, $\nu(G) = \tau(G)$, tehát két csúccsal lefogható az összes él. 5 pont

Viszont egy csúccsal legfeljebb 9 élt tudunk lefogni, tehát két csúccsal csak 18 élt, ami ellentmondás, mert 20 élünk van. Tehát $\nu(G) \geq 3$. 5 pont