Egy $G(V,E)$ egyszerű gráfra és a csúcsainak $X \subset V$ részhalmazára legyen $C_p(G \setminus X)$ a $G \setminus X$ gráf páratlan méretű komponenseinek a száma.

Tutte Tétel (1947) *Egy G gráfban akkor és csak akkor van teljes párosítás, ha tetszőleges $X \subset V$ esetén $C_p(G \setminus X) \leq |X|$.*

Bizonyítás. (Lovász, 1975) A feltétel szükségessége könnyen látható. Tegyük fel, hogy $G(V,E)$-ben van egy M teljes párosítás, legyen $X \subset V$ és legyen K $G \setminus X$ tetszőleges páratlan komponense. Mivel K-nak páratlan sok pontja van, nem lehet az összes pontját K-n belül párosítani, vagyis M-nek van olyan éle, aminek egyik vége K-beli, a masik nem. Mivel K-ból kifelé csak X-be vezetnek élek, ennek az M-beli élnek a másik vége X-beli. Ez $G \setminus X$ tetszőleges páratlan komponensére igaz, vagyis mindegyikből vezet egy él X-be. De mivel M egy párosítás, összesen nem vezethet X-be több, mint $|X|$ M-hez tartozó él. Ezért $G \setminus X$-nek nem lehet több, mint $|X|$ páratlan komponense.

Most bebizonyítjuk a másik irányt. Tegyük fel, hogy a $G(V,E)$ gráfban nincs teljes párosítás. Találni fogunk egy *rossz* X halmazt, vagyis egy olyat, ami megsérti a feltételt, tehát $C_p(G \setminus X) > |X|$. Ha G-nek páratlan sok csúcsa van, akkor az üres halmaz megfelel rossz halmaznak, tehát a továbbiakban feltesszük hogy G-nek páros sok csúcsa van.

Tegyük fel, hogy hozzá tudunk venni G-hez egy élet úgy, hogy továbbra sincs benne teljes párosítás, és legyen a kapott gráf G'. Legyen X egy rossz halmaz G'-ben. Ekkor X G-ben is rossz halmaz, hiszen $G' \setminus X$-nek és $G \setminus X$-nek vagy ugyanazok a komponensei, vagy $G' \setminus X$ egyik komponense $G \setminus X$-ben két komponensre esik szét, de egyik esetben sem csökkenhetett a páratlan komponensek száma, hiszen ha egy páratlan komponens ketté esett, az egyik komponens biztosan páratlan. Ezért feltehetjük, hogy G él-maximális abban az értelemben, hogy nincs benne teljes párosítás, de bárhogy veszünk hozzá egy élet, akkor már lesz.

Ha X egy rossz halmaz G-ben, akkor az él-maximalitás miatt

X pontjai minden más ponttal össze vannak kötve, és $G \setminus X$ minden komponense teljes gráf. (*)

De ha egy X halmaz kielégíti a (*) tulajdonságot, akkor $G \setminus X$ minden páros méretű komponensének van teljes párosítása, a páratlan komponenseket pedig egy pont híján a komponensen belül be tudjuk párosítani, ha tehát legfeljebb annyi páratlan komponens van mint $|X|$, akkor azt a komponensenként egy-egy maradék pontot egy-egy X-beli ponttal tudjuk párosítani, majd a maradék X-belieket egymással. Ezek szerint, mivel nincs teljes párosítás, egy X halmaz rossz akkor és csak akkor ha kielégíti a (*) tulajdonságot. Tehát elég egy (*) tulajdonságot kielégítő X halmazt találni.

Legyen X azon pontok halmaza, amelyek minden más ponttal össze vannak kötve. Tegyük fel hogy X-re nem igaz (*). Ekkor $G \setminus X$ valamelyik K komponensében van két pont, a és a', amelyek nincsenek összekötve. Legyen a, b, c az a es a' közti legrövidebb út első három pontja. Ilyen út van, mert K összefüggő. Ekkor $ab, bc \in E$, de $ac \notin E$ (különben lenne eggyel rövidebb aa' út). Mivel $b \notin X$, ezért b nincs minden más ponttal összekötve, legyen d olyan amelyre $bd \notin E$. Mivel G él-maximális, bármely élet hozzáadva már van benne teljes párosítás. Legyen M_1 $G + ac$, és M_2 $G + bd$ egy-egy teljes párosítása.

Az $M_1 \cup M_2$ élhalmaz független élekből (ezek azok az élek, amelyek mindkét párosításban benne vannak) és egy 2-reguláris gráfból áll, tehát független élek és körök uniója. Ha ennek csak a G-beli részét nézzük, vagyis $M_1 \cup M_2$-ből elvesszük az ac és bd éleket, akkor néhány független élen kívül két utat kapunk, és néhány kört.

Legyen $P = d, \ldots, v$ egy maximális G-beli út, amely d-ből indul egy M_1-beli éllel, majd felváltva tartalmaz M_1 és M_2-beli éleket. Ha P utolsó éle M_1-beli, akkor $v = b$, hiszen minden más pontra illeszkedik G-ben M_2-beli él. Legyen ekkor $C = P + bd$. Ha P utolsó éle M_2-beli, akkor v-re nem illeszkedik G-ben M_1-beli él, ezért $v = a$ vagy $v = c$. Ekkor legyen $C = dPvbd$. Mindkét esetben C egy páros hosszú kör, amelyben minden második él M_2-höz tartozik, de ezek közül $bd \notin E$. (C összes többi éle G-nek is éle.) Ha ezeket az M_2-beli éleket kicseréljük C többi élére, akkor egy teljes párosítást kapunk G-ben, ami ellentmondás. Tehát X egy rossz halmaz.

Ezzel beláttuk a Tutte tételt.