Menger tételek, többszörös összefüggőség

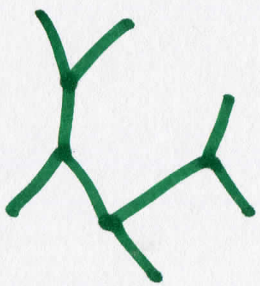
G k-szorosan pontösszefüggő (összefüggő) ha $\geq k+1$ pontja van és kevesebb, mint k pont elhagyása után még összefüggő marad.

$(k \geq 1)$

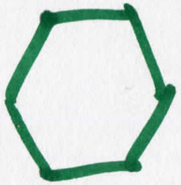
ez csak a teljes gráf miatt kell

Ha G k-összefüggő $\rightarrow$ 1, 2 ... k-összefüggő.

G pontösszefüggőségi (összefüggőségi) száma $\kappa(G)$: max k, amire G k-összefüggő.



FA: $\kappa=1$

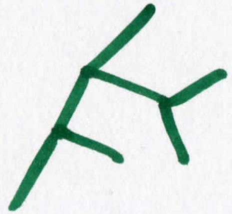


kör: $\kappa=2$

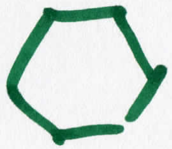
G k-szorosan élösszefüggő, ha kevesebb, mint k élt elhagyva még összefüggő marad.

Nyilván ha G k-élösszefüggő, akkor 1, 2 ... k-élöf.

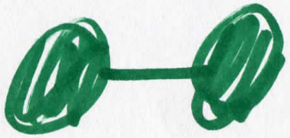
G élösszefüggőségi száma $\lambda(G)$: max k, amire G k-élösszefüggő



FA : $\lambda = 1$



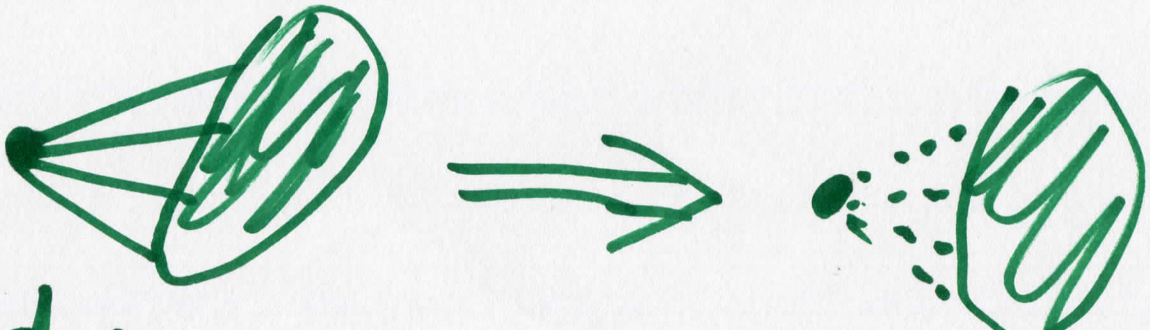
KÖR: $\lambda = 2$



$\lambda = 1$

Minden gráfra $d_{min} \geq \lambda$

min fokszám



d_{min}

d_{min} él elhagyásával szét lehet szedni

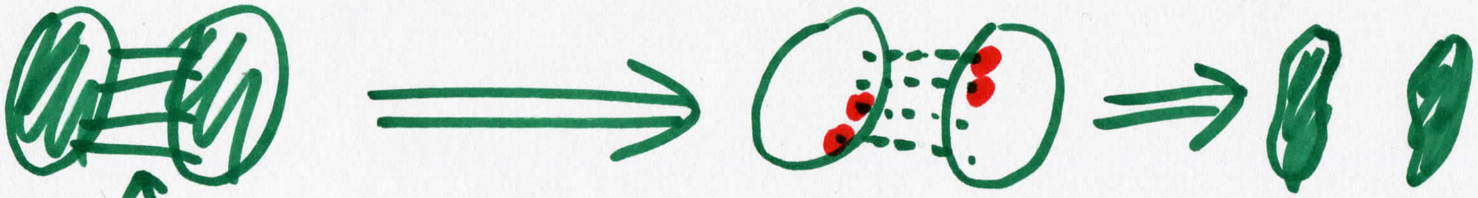
Minden G gráfra $d_{min} \geq \lambda \geq \kappa$

ezt már láttuk

$\lambda \geq \kappa$ Bizonyítás ötlet:

Szét tudjuk szedni G-t λ él elhagyásával

$\Longrightarrow$ szét tudjuk szedni λ <u>csúcs</u> elhagyásával is.



G $\quad$ λ él: hagyjuk el mindegyik él valamelyik végét: λ pont

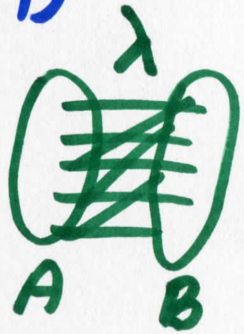
Probléma: vigyázni kell, el ne fogyjon valamelyik oldal. $\longrightarrow$ egy kis esetszétválasztás

(gyak feladatsoron)

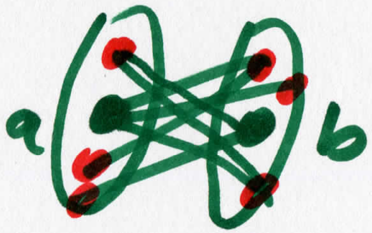
$\lambda \geq \kappa$:

Ha $G = K_n$ teljes gráf: $\kappa = \lambda = n-1$

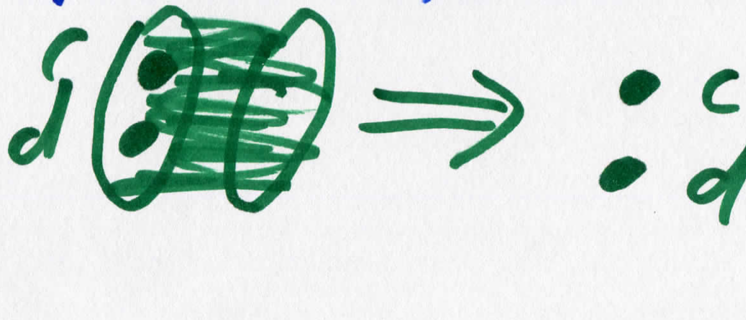
G nem teljes gráf, λ éllel el lehet vágni: A, B



1. Van $a \in A$, $b \in B$, amik nincsenek összekötve: minden él a-tól és b-től KÜLÖNBÖZŐ végét hagyjuk el!
   (Szétesett, a, b megmaradt)



2. Nincs ilyen a, b $\Rightarrow$ van $c, d \in A$ amik nem szomszédok: Hagyjunk el MINDENT kivéve c, d-t! Kevesebb, mint λ pontot hagytunk el, szétesett!

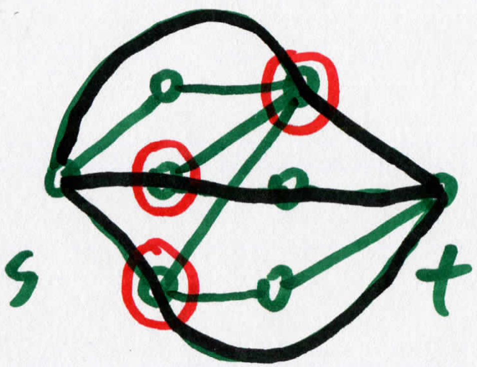


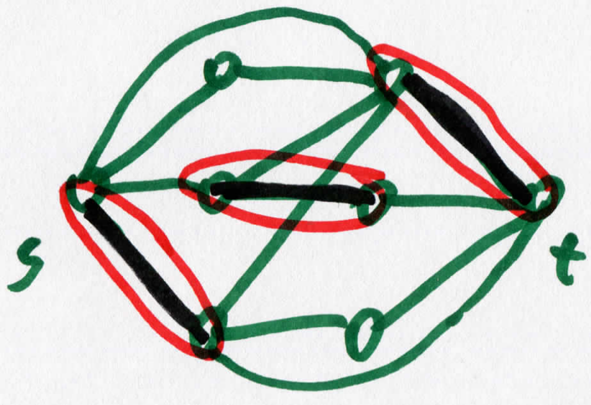
Menger tételek:

Irányított
Irányítatlan gráfban s–t irányított
irányítatlan pontidegen
élidegen utak maximális száma =

s–t irányított
irányítatlan utakat lefogó pontok
élek minimális száma.

(pont-pontidegen esetben: s, t nem szomszédos)





Menger biz 1: irányított, élidegen

G-ben $s \to t$ élidegen utak max száma = s-t elvágó élek min száma.

$\leq$ trivi: minden utat le kell fogni

Hálózat: G, s, t, c : minden él kapacitása 1.

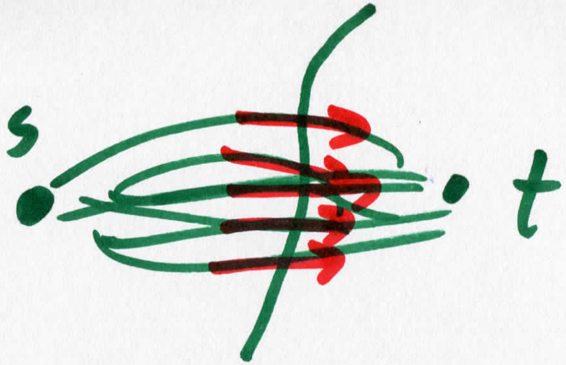
max s-t folyam = k. EGÉR lemma: megvalósítható csupa egész folyammal. Ltd: ez egy 0/1 folyam.

k nagyságú 0/1 folyam: tartalmaz k éldiszjunkt utat (pl indukcióval)

Viszont k db s-t út G-ben $\Rightarrow$ k nagyságú folyam.

Max s-t utak G-ben k $\Longleftrightarrow$ max folyam G, s, t, c-ben k

Ford-Fulkerson : G, s, t, c-ben



max folyam = min vágás

k　　　　k

$\Updownarrow$　　　　$\Updownarrow$

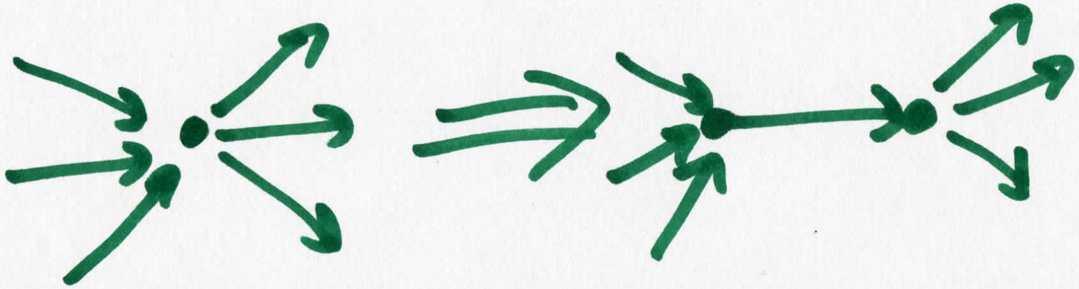
max s-t éldiszjunkt utak　　　　min s-t elvágó élek

k = k

Menger 1: ✓

Menger 1: irányított, pontidegen.

$G, s, t \Longrightarrow G', s, t$



minden csúccsal, kivéve s, t.

k pontdiszjunkt s–t út $\Longleftrightarrow$ k éldiszjunkt s–t út

max pontdiszjunkt s–t út $=$ max éldiszjunkt s–t út

$G, s, t \Longrightarrow G', s, t$

k elvágó pont $\Longleftrightarrow$ k elvágó él

min elvágó pont = min elvágó él.

$\Rightarrow$ trivi

$\Leftarrow$ minden elvágó élnek vegyük az s, t-től különböző végét.

max s-t élidegen út G'-ben = min s-t elvágó él G'-ben

|| ||

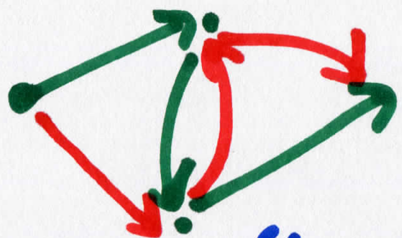
max s-t pontidegen út G-ben = min s-t elvágó pont G-ben

Menger 3. Irányítatlan, éldiszjunkt.

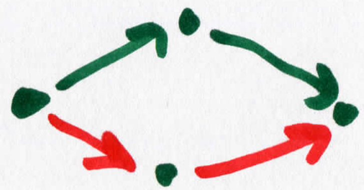
$G, s, t \Longrightarrow G', s, t$

k éldiszjunkt s-t út $\Longleftrightarrow$ k éldiszjunkt s-t út $\Rightarrow$ trivi

$\Longleftarrow$: G'-ben k éldiszjunkt s-t út:
lehet ilyen:



ilyenkor egyszerűsítünk:



végül: irányítás NÉLKÜL is
éldiszjunktak.

$G, s, t \Longrightarrow G', s, t$

k s-t elvágó él $\Longleftarrow$ k s-t elvágó él

min s-t elvágó él $\leq$ min s-t elvágó él

---

min s-t elvágó él G'-ben $=$ max s-t éldiszjunkt út G'-ben

$\geq$ $\qquad\qquad$ $\|$

min s-t elvágó él G-ben $\leq$ max s-t éldiszjunkt út G-ben

DE triviálisan $\geq$ vagyis $=$

Menger 4: irányítatlan, pontdiszjunkt: mindkét trükköt alkalmazzuk.

$$
\begin{tikzcd}
M1 \arrow[r] \arrow[dr] & M2 \arrow[r] & M4 \\
 & M3 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

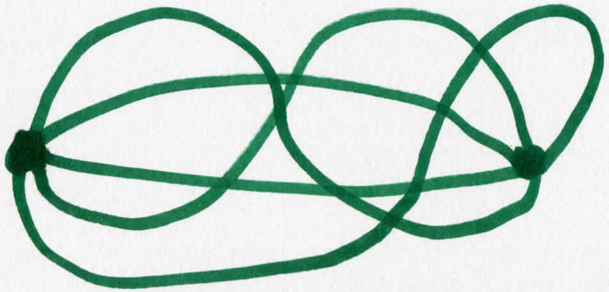
G k-összefüggő (pont-) $\Longleftrightarrow$ $\geq k+1$ pontja van és bármely 2 pont között van k pontidegen út.

G k-élösszefüggő $\Longleftrightarrow$ bármely 2 pont közt van k élidegen út.

G k-élöf $\Longleftrightarrow$ bármely 2 pont közt van k élidegen út.

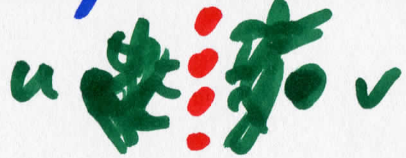
Biz: $\Longleftarrow$ bármely 2 pont közt van k élidegen út $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ nem választhatók el k-1 él elhagyásával
$\Rightarrow$ k-1 él elhagyása után öf. marad
$\Rightarrow$ k-élösszefüggő.

$\Longleftarrow$ k-élöf $\Rightarrow$ két pont nem választható el k-1 éllel $\Longrightarrow$ (Menger) van köztük k élidegen út.

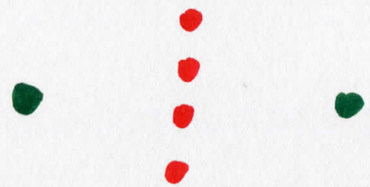


G k-pontösszefüggő $\Longleftrightarrow$ $\geq k+1$ pontja van és bármely 2 pont közt van k pontidegen út.

$\Longleftarrow$ Tfh $k-1$ pont elhagyásával u, v -t elválasztottuk. ekkor u-v nem szomszédos, és (Menger) max $k-1$ pontdiszjunkt út van köztük.



$\Longrightarrow$ Tfh k-összefüggő $\Longrightarrow$ $\geq k+1$ pont.
Tfh u-v közt csak $k-1$ pontidegen út van.
Ha u-v nem szomszédos: (Menger) $k-1$ pont elválasztja őket, ellentmondás (k-öf).



k-1

Ha u-v szomszédos: $\longrightarrow$

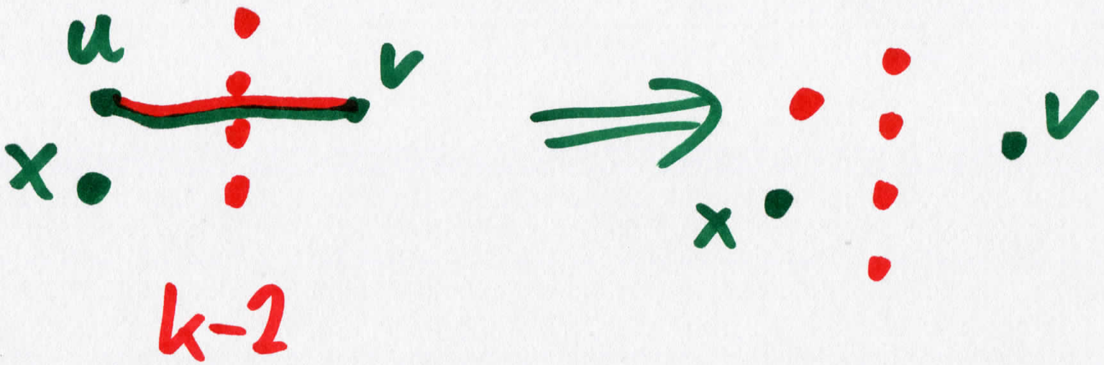
G k-pontöf $\Longleftrightarrow$ $\geq k+1$ pont és bármely 2 pont közt van k pontidegen út.

$\Longrightarrow$ Tfh u-v közt csak k-1 pontidegen út van és u-v szomszédos. Hagyjuk el az u-v élt!

$\Longrightarrow$ legfeljebb k-2 pontidegen u-v út $\Longrightarrow$ (Menger) k-2 pont elválasztja őket.

Marad: ≥ 3 pont. Tehát: k-2 pont és uv él elhagyásával szétesik a gráf.

$\Longrightarrow$ k-2 pont + u vagy v: szétesett a gráf $\lightning$

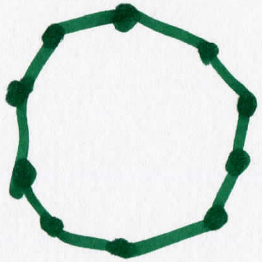


Dirac tétel:

G k-pontösszefüggő, $k \geq 2$ $\Longrightarrow$ bármely k pontos át van kör.

— $k=2$-re: trivi Mengerből.

— $\Longleftarrow$ nem igaz:



2-öf, de bármely k pontján át van kör (k akármennyi)

Biz: gyak feladatsoron. indukció