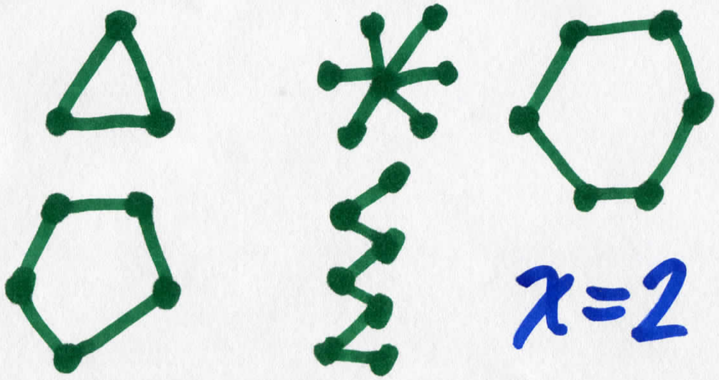
Kromatikus szám

G gráf. Minden csúcsnak egy szín. **Jó színezés (színezés):** Minden él két végpontja különböző színű.

$\chi(G)$ (khi): kromatikus szám: G csúcsainak a jó színezéséhez szükséges színek min. száma.



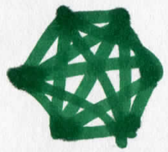
$\chi=3$

$\chi=2$

Páros gráf:

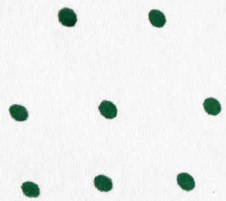
$\chi=2$

K_n



$\chi=n$

nincs él



$\chi=1$

$\Delta(G)$: max fokszám G-ben.

$\omega(G)$: klikkszám: max teljes részgráf mérete.
(omega)

$$\omega(G) = \alpha(\bar{G})$$ (klikk komplementere ftlen)

<u>Minden G-re: $\chi \geq \omega$.</u>

Biz: ω méretű teljeshez szükség van ω db színre.

<u>Minden G-re: $\chi \leq \Delta + 1$.</u>

Biz: mohó színezés. Sorban színezzük a csúcsokat: mindig a (legkisebb sorszámú) lehetséges színnel.

v_1 v_2 v_3 ... v_k ...

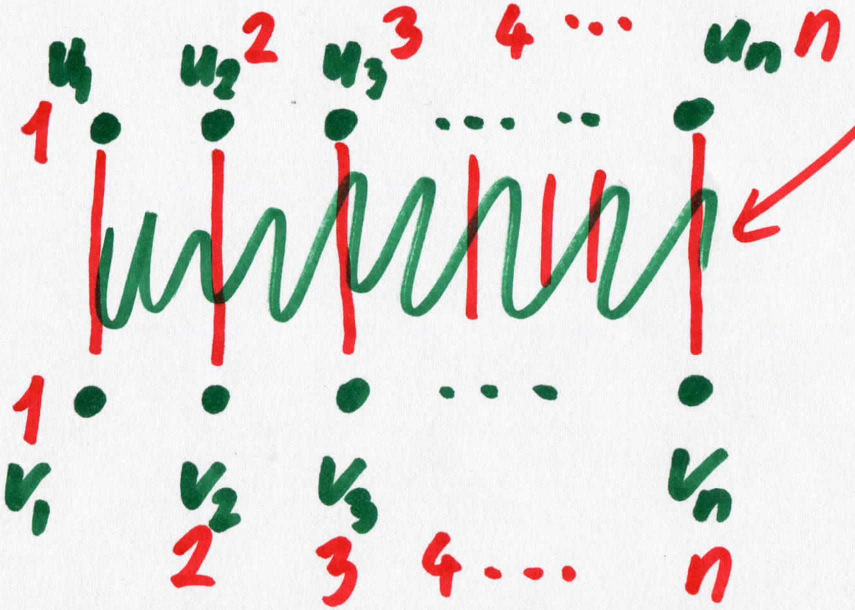
v_k: max Δ db már kiszínezett szomszéd $\Rightarrow$ $1, 2, \dots \Delta+1$ színek közül valamelyik jó lesz.

Mohó színezés max $\Delta+1$ színt használ. Lehet, hogy sokkal kevesebb kell!

Példa: $K_{n,n}$ − teljes párosítás. $u_1 u_2 \cdots u_n$, $v_1 v_2 \cdots v_n$.

$u_i - v_j \iff i \neq j$. $\chi = 2$: páros gráf.

DE: MOHÓ $u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n$ sorrendben: n szín!



ezek az élek hiányoznak

Ha viszont $u_1 u_2 \cdots u_n v_1 v_2 \cdots v_n$ sorrenden megy a mohó: 2 szín!

$\chi \leq \Delta + 1$ általánosságban nem javítható!

$G = C_{2k+1}$ páratlan kör: $\Delta = 2$, $\chi = 3$

$G = K_n$ teljes gráf: $\Delta = n-1$, $\chi = n$

Brooks: G összefüggő, nem páratlan kör, nem teljes gráf $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq \Delta(G)$

gyenge Brooks: G összefüggő, nem reguláris $\Longrightarrow$ $\chi(G) \leq \Delta(G)$

gyenge Brooks biz. ötlet: mohó színezés ügyes sorrendben.

gyenge Brooks: öf, nem reguláris $\Rightarrow \chi \leq \Delta$

Tfh n csúcs van. Legyen v_n olyan, hogy $d(v_n) < \Delta$
(van ilyen, nem reguláris)

G öf $\Rightarrow$ van F feszítőfa. v_1: v_n-től különböző levél.

v_2 : v_n-től kül. levél $F \setminus v_1$-ben

v_3 $\quad F \setminus v_1 v_2$

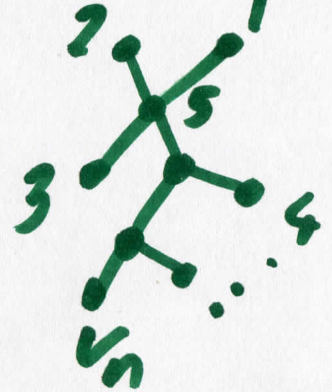
(lebontjuk a fát)

$\vdots$

v_i $\quad F \setminus v_1 v_2 \dots v_{i-1}$

$\vdots$

v_{n-1} $\quad F \setminus v_1 \dots v_{n-2}$



MOHÓ színezés $v_1 v_2 \dots v_n$ sorrendben.

$i<n$: $\quad v_i$: van nem színezett szomszédja $\Rightarrow$ max $\Delta - 1$
színezett szomszéd $\Rightarrow$ Δ szín elég.

v_n : $d(v_n) < \Delta \Rightarrow \Delta$ szín elég.

$\chi \geq \omega$: Általánosságban ez sem javítható (pl K_n)

DE: lehetnek nagyon messze egymástól.

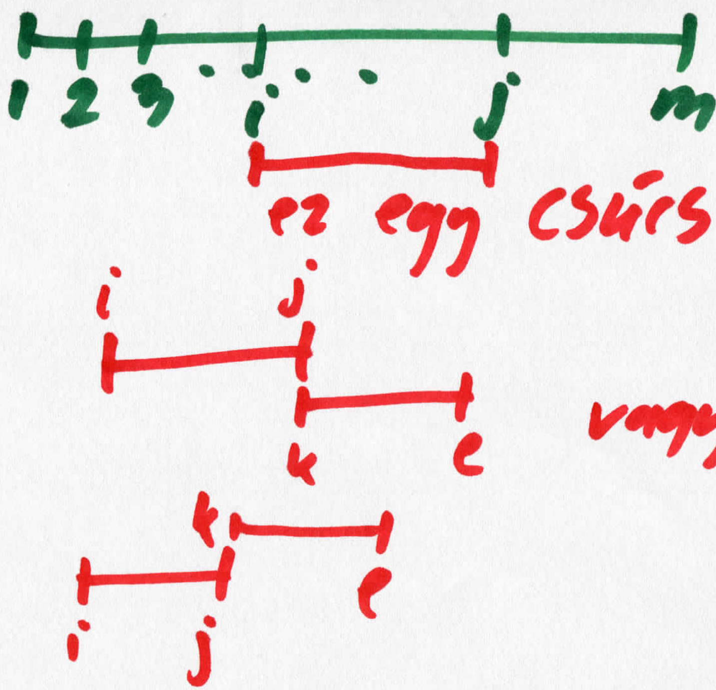
$\omega = 1$: nincs él $\Rightarrow$ $\chi = 1$

$\omega = 2$: χ akármilyen nagy lehet!

G-ben nincs Δ

Két példa: Shift gráf, Zykov konstrukció.

Shift gráf, S_m.

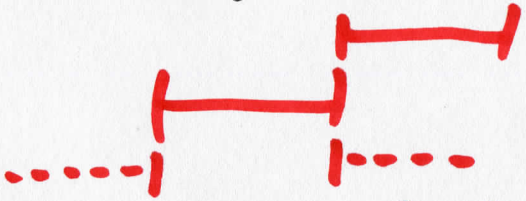


__Csúcsok:__ (i,j), $1\le i<j\le m$

$n=\binom{m}{2}$ csúcs

__Élek:__ $(k,\ell)\sim(i,j)$ ha $j=k$ vagy $i=\ell$

__Nincs △__ (triviális)

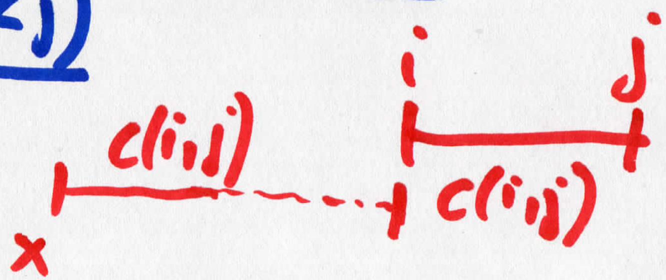


Tfh k színnel kiszíneztük. $C=\{1,2\dots k\}$

$C_j=\{c(i,j)\mid i<j\}$

j-ben végződő színek halmaza.

Állítás: ha $i\ne j$ ($i<j$), $C_i\ne C_j$ Biz: $c(i,j)\in C_j$, $c(i,j)\notin C_i$



(x,i), (i,j) nem lehet egyforma színű

$C = \{1, 2 \dots k\}$, $i = 1, 2 \dots m$-re $C_i \subseteq C$ és különbözők

$$\Rightarrow \quad 2^k \geq m$$

$$k \geq \log m \geq \frac{\log n}{2}$$

S_m shift gráf: $n = \binom{m}{2}$ csúcs, nincs Δ $(\omega(S_m) = 2)$

és $\chi(S_m) \geq \log m \geq \frac{\log n}{2}$

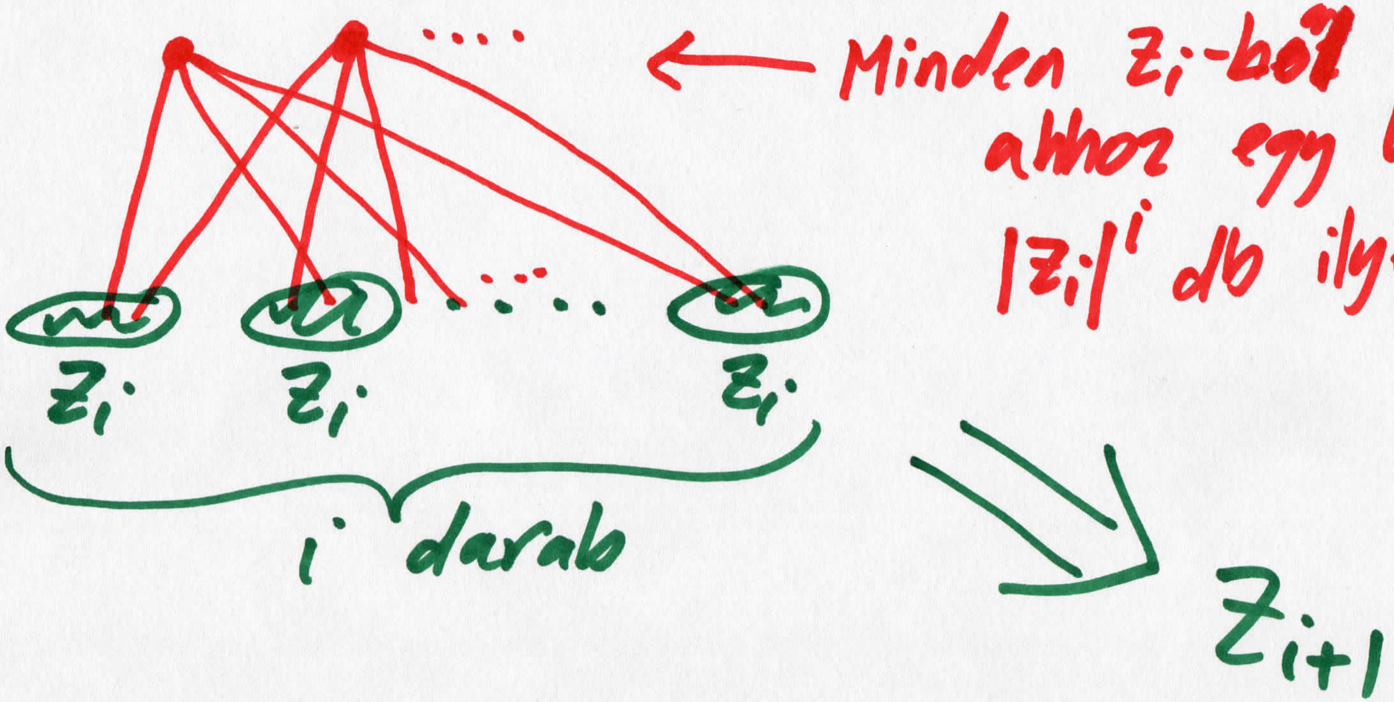
Zykov konstrukció Z_i, $i=2,3\cdots$

$\underline{\omega(Z_i)=2}$, $\underline{\chi(Z_i)=i}$

$Z_2 =$ 

Tfh Z_i már megvan, $\omega=2$, $\chi=i$

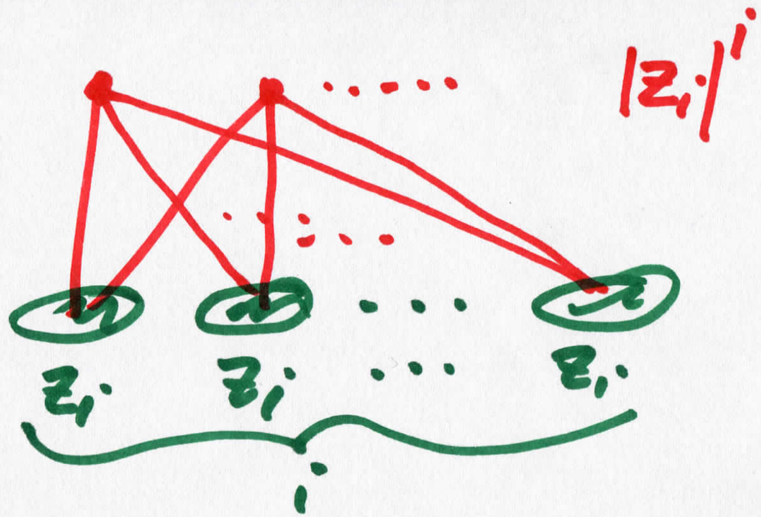
$\Longrightarrow Z_{i+1}$:



Minden Z_i-ből 1-1 pontot választunk, ahhoz egy közös szomszéd.

$|Z_i|^i$ db ilyen pont!

Nincs Δ: triviális.



Tudjuk: $\chi(Z_i)=i$

Próbáljuk Z_{i+1}-et kiszínezni i színnel:

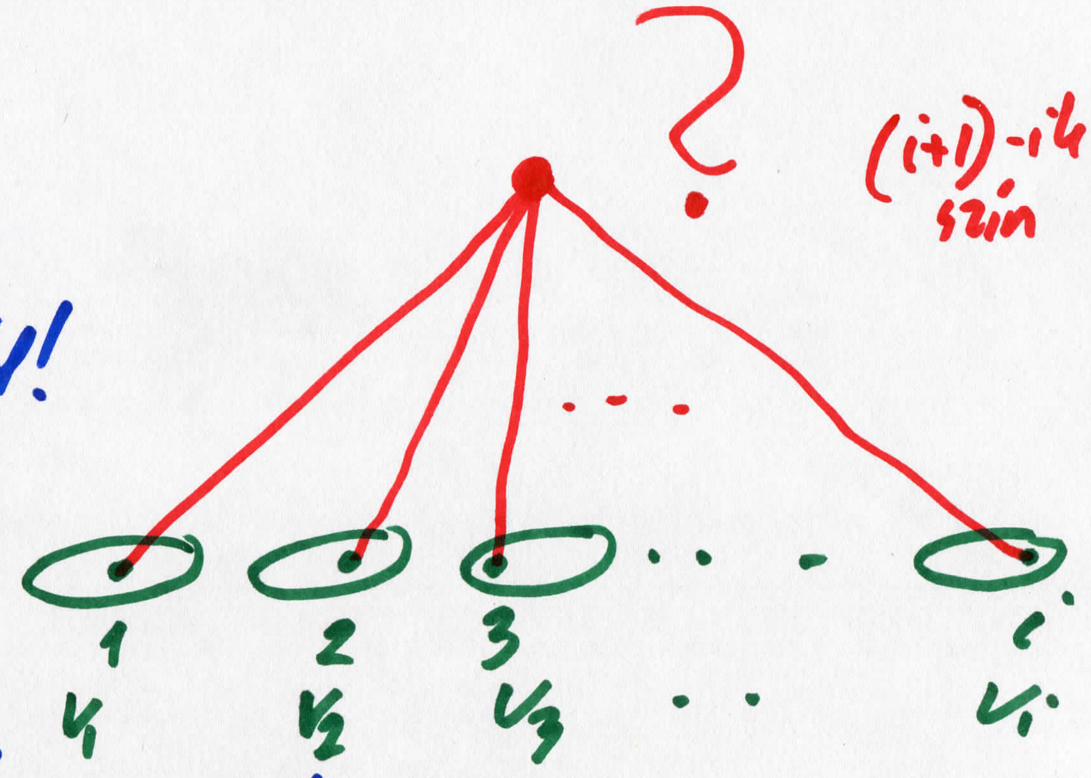
minden Z_i-ben minden szín van.

Van 1. Z_i-ben v_1: 1-színű.

2. Z_i-ben v_2: 2-színű

⋮

i. Z_i-ben v_i: i-színű.



Van hozzájuk közös szomszéd!

Nem tudjuk kiszínezni!

Tehát $\chi(Z_{i+1}) \geq i+1$.

De felsőpontok lehetnek i+1. színűek $\Rightarrow \chi(Z_{i+1}) = i+1$