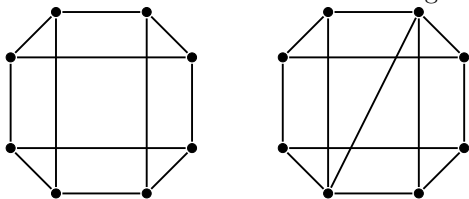


Kombinatorika és gráfelmélet 2.

13. gyakorlat, 2014. december 12.

Perfekt gráfok

1. Mutassunk olyan perfekt gráfot, ami nem intervallumgráf.
2. Legyenek a G_n gráf csúcsai az $1, 2, 3, \dots, n$ számok, és legyen ij él, ha i és j relatív prímek. Határozzuk meg a $\chi(G)$ és $\omega(G)$ paramétereit. Perfekt-e a G_n gráf? (Tegyük fel, hogy n elég nagy.)
3. Képezzük a G' gráfot a G perfekt gráfból úgy, hogy egy G -től diszjunkt v csúcsot összekötünk G egy klikkjének minden csúcsával. Mutassuk meg, hogy G' is perfekt gráf.
4. A G gráf csúcsai legyenek a 8×8 -as sakktábla mezői, és két mező akkor legyen szomszédos G -ben, ha lóugrásnyira vannak egymástól. (A huszár mindig egy 3×2 -es téglalap egyik csúcsából az átellenes csúcsába lép.) Mutassuk meg, hogy G perfekt. Mi a helyzet más figurákkal?
5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráf pontosan akkor perfekt, ha G minden G' feszített részgráfjának van olyan független ponthalmaza, ami G' minden maximális méretű klikkjét metszi.
6. a) Van olyan gráf, ami intervallumgráf, de nem egy intervallumgráf komplementere?
b) Van olyan gráf, ami egy intervallumgráf komplementere, de nem intervallumgráf?
7. Írjuk le azokat a G gráfokat, amelyeknek minden H részgráfjára $\omega(H) = \chi(H)$.
8. Legyen G olyan n csúcsú véges egyszerű gráf, amelyik nem perfekt, de ha tetszőleges csúcsát elhagyjuk, az így kapott gráf már perfekt. Mutassuk meg, hogy $n - 1$ nem lehet prímszám.
9. A G gráf *splitgráf*, ha csúcshalmaza előáll egy klikk és egy független ponthalmaz uniójaként. Mutassuk meg, hogy minden splitgráf perfekt.
10. Perfektek-e az alábbi ábrán látható gráfok?



11. Legyen adott egy T fa és ennek F_1, \dots, F_n részfái. Megadunk egy G gráfot az $\{F_1, \dots, F_n\}$ halmazon: F_i és F_j ($i \neq j$) akkor legyen szomszédos, ha van közös csúcsuk. Bizonyítsd be, hogy G perfekt!
12. Igazoljuk, hogy ha a G gráf bármely feszített részgráfjának van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, akkor $ch(G) \leq 6$.
13. Ha az n csúcsú G gráf bármely k csúcsa legfeljebb $4k$ élt feszít, akkor $ch(G) \leq 9$ teljesül.
14. Nevezzünk egy gráfot keresztbe metszőnek, ha tetszőleges nem bővíthető klikkje és tetszőleges nem bővíthető független halmaza tartalmaz közös pontot. G öröklődően keresztbe metsző, ha minden feszített részgráfja keresztbe metsző. Mutassuk meg, hogy egy gráf akkor és csak akkor öröklődően keresztbe metsző, ha nem tartalmaz P_4 -gyel (azaz 4 csúcsú úttal) izomorf feszített részgráfot. (Ne használjuk az erős perfekt gráf tételt.)
Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban nincs P_4 -gyel izomorf feszített részgráf, akkor a gráf perfekt.
15. Helyettesítsük a G perfekt gráf v csúcsát egy H perfekt gráffal, azaz a $G - v$ -től diszjunkt H gráf minden csúcsát kössük össze v minden szomszédjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf perfekt.
16. Perfekt-e az $L(K_n)$ gráf?
17. Tegyük fel, hogy G perfekt gráf, és G csúcsainak X részhalmazára az igaz, hogy X bármely pontja szomszédos $V(G) \setminus X$ tetszőleges pontjával. Bizonyítsuk be, hogy az a G' gráf is perfekt, amit úgy kapunk, hogy töröljük G -ből az X és $V \setminus X$ között futó éleket.