

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

8. gyakorlat, 2024. április 19.

*Hall, Frobenius, görög betűk, König, Gallai, Tutte*

## Tudnivalók

**Frobenius tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha  $|A| = |B|$ , és minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

**Hall tétel:** Akkor és csak akkor van a  $G(A, B, E)$  páros gráfban  $A$ -t lefedő párosítás, ha minden  $X \subset A$ -ra  $|X| \leq |N(X)|$ .

$\alpha(G)$ : független pontok maximális száma;  $\tau(G)$ : lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$ : független élek maximális száma;  $\rho(G)$ : lefogó élek minimális száma.

**König tétel:** (a) Ha  $G$  páros gráf, akkor  $\nu(G) = \tau(G)$ . (b) Ha  $G$  páros és nincs izolált pontja, akkor  $\alpha(G) = \rho(G)$ .

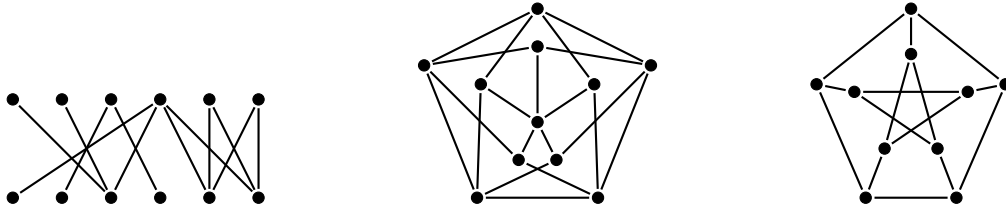
**Gallai tétel:** (a) Ha  $G$ -ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\tau(G) + \alpha(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma. (b) Ha  $G$ -ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor  $\nu(G) + \rho(G) = n$  ahol  $n$   $G$  csúcsainak a száma.

**Tutte tétel:** A  $G$  véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges  $X$  csúcshalmazra  $G - X$ -nek legfeljebb  $|X|$  páratlan komponense van:  $c_p(G - X) \leq |X| \quad \forall X \subseteq V$  esetén.

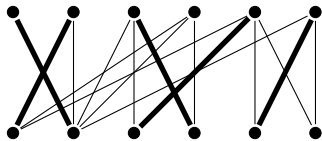
	max független	min lefogo	Konig, ps graf	
pont	$\alpha$	$+$ $\tau$	$=n$	Gallai nincs hurokel
		$\times$		
el	$\nu$	$+$ $\rho$	$=n$	Gallai nincs iz pont
			Konig ps graf, nincs iz pont	

1. Adott  $n$  fiú és  $n$  lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
2. Bizonyítsuk be, hogy ha a  $G$  páros gráf összefüggő és az  $A$  osztályában a fokszámok különbözők, akkor  $G$ -nek van  $A$ -t fedő párosítása.
3. Egy kiránduláson  $n$  házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani  $2n$  különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább  $n$  fajtát szeret a  $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.
4. A  $G$  irányított gráf minden csúcsából  $k$  él indul és  $k$  él érkezik. Igaz-e, hogy  $G$ -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek  $G$  minden csúcsán áthaladnak?
5. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
6. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
7. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
8. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan  $k$  db különböző teljes párosítása van.
9. Igaz-e, hogy tetszőleges véges  $G$  gráf mindazon élei, amik  $G$  valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

10. Valaki véletlenszerűen szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsuk be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy darab 2-es, egy darab 3-as, stb., egy darab A). (A francia kártyában 13 fajta figura van: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A. Minden figurából 4 darab van egy pakliban.)
11. Legyen  $G$  egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy  $\nu(G) \geq 6$ . ( $\nu(G)$  a független élek maximális számát jelöli.)
12. Adott egy  $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan  $k$  darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható  $n$  darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
13. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\alpha(G)$  értékeket!



14. Legyen  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_{2004}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg  $\alpha(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  és  $\tau(G)$  értékeit.
15. Legyen  $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_{74}\}$ . A  $v_i$  és  $v_j$  ( $i \neq j$ ) csúcsok között akkor menjen él, ha  $i + j$  és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az  $\alpha(H)$ ,  $\nu(H)$ ,  $\rho(H)$ ,  $\tau(H)$  értékét!
16. Legyen  $G$  egy  $2n$  pontú gráf, mely egy  $2n - 1$  pontú  $L$  útból és egy  $c$  pontból áll, ami  $L$  minden pontjával össze van kötve. Mennyi  $\tau(G)$ ?
17. Lássuk be, hogy egy  $n$  pontú egyszerű  $G$  gráfban  $\tau(G) = n - 1$  akkor és csak akkor, ha  $G = K_n$ .
18. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



19. Jelölje  $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát,  $\tau(G)$  pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy  $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$ .
20. Jelölje  $\omega(G)$  a  $G$  gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz  $G$  komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy  $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$ .
21. Egy 100 csúcsú egyszerű  $G$  gráfban bármely 3 csúcs között van legalább 2 él. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben van teljes párosítás.
22. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű  $G$  gráfnak  $X$  egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek  $x, y$  és  $z$  különböző  $X$ -beli csúcsok. Tartalmazhat-e a  $G + xy + yz + zx$  gráf teljes párosítást?

### Házi feladat

1. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve akkor és csak akkor, ha  $|i - j| < 7$ . Határozzuk meg  $\kappa(G)$ -t,  $G$  pontösszefüggőségi számát.
2. Legyenek  $G$  csúcsai  $v_1, v_2, \dots, v_{1000}$ ,  $v_i$  és  $v_j$  össze van kötve akkor és csak akkor, ha  $|i - j| = 1, 3$ , vagy  $5$ . Határozzuk meg az  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  értékeket.