

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. és 10. gyakorlat, 2012. november 9, 10.

Összefüggőség, Menger-tételek, Hall-tétel, König tétel

Egy G gráfot k -szorosan (pont)összefüggőnek nevezünk, ha legalább $k + 1$ pontja van, és akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb pontot, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosan összefüggő, $\kappa(G)$ -vel jelöljük. Egy G gráfot k -szorosan élösszefüggőnek nevezünk, ha akárhogy hagyunk el belőle k -nál kevesebb élet, a maradék gráf összefüggő marad. A legnagyobb olyan k számot, amelyre még a G gráf k -szorosan élösszefüggő, $\lambda(G)$ -vel jelöljük.

Menger tételek:

1, 2. Ha G egy irányított (irányítatlan) gráf, s, t , két csúcsa, akkor az s -ből t -be vezető páronként élidegen irányított (irányítatlan) utak maximális száma egyenlő az irányított (irányítatlan) s - t utakat lefogó élek minimális számával.

3, 4. Ha G egy irányított (irányítatlan) gráf, s, t , két nem szomszédos csúcsa, akkor az s -ből t -be vezető, s és t kivételével páronként pontidegen irányított (irányítatlan) utak maximális száma egyenlő az irányított (irányítatlan) s - t utakat lefogó pontok minimális számával.

$G(A, B, E)$ páros gráf, ha A és B a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut. Legyen G egy tetszőleges gráf. Egy e_1, e_2, \dots, e_k élhalmaz **független**, vagy **párosítás**, ha nincs közös végpontjuk. Egy élhalmaz **lefogó**, ha G minden pontja az élhalmaz valamelyik élének egyik végpontja. Egy ponthalmaz **független**, ha nincs köztük él. Egy ponthalmaz **lefogó**, ha G minden élének legalább az egyik végpontját tartalmazza.

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Tetszőleges X csúcshalmazra legyen $N(X)$ X szomszédainak a halmaza, vagyis azon csúcsok halmaza, amelyek legalább egy X -beli csúcscsal össze vannak kötve. Legyen most $G = G(A, B, E)$ páros gráf, vagyis A és B a csúcsok halmaza, E az élek halmaza, és minden él A és B között fut.

Frobenius tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban teljes (minden csúcsot párosító) párosítás, ha $|A| = |B|$, és minden $X \subset A$ -ra $|X| \leq |N(X)|$.

Hall tétel: Akkor és csak akkor van a $G(A, B, E)$ páros gráfban A -t lefedő párosítás, ha minden $X \subset A$ -ra $|X| \leq |N(X)|$.

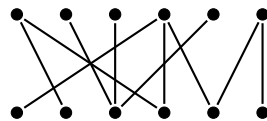
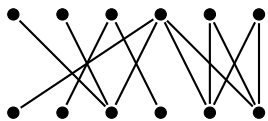
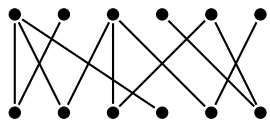
König tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

(b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

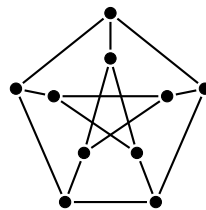
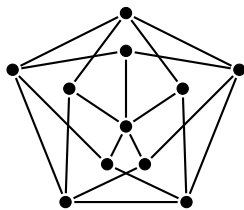
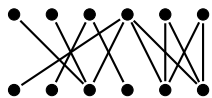
Gallai tétel: (a) Ha G -ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma. (b) Ha G -ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k -szorosan pontösszefüggő?
3. Bizonyítsuk be, hogy egy k -szorosan összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
4. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden foksám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k -szorosan összefüggő!
5. Igazoljuk, hogy tetszőleges r -reguláris ($r > 1$) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő is!
6. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
7. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem.
8. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u -ból v -be is és v -ből w -be is k éldiszjunkt irányított út akkor G -ben létezik u -ból w -be is k éldiszjunkt irányított út.
9. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)
10. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r -elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r -elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k -összefüggő?

11. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.
12. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?
13. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?
14. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



15. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.
16. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a foksámok különbözők, akkor G -nek van A -t fedő párosítása.
17. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G -nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
18. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.
19. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs foksáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)
20. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
21. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.
22. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncrea perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!
23. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



Házi feladatok

1. Tegyük fel, hogy G 3-összefüggő, vegyünk fel egy új x pontot, amit G három különböző pontjával összekötünk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 3-összefüggő marad!
2. Igazoljuk, hogy ha a 2012-pontú G gráf 11-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 183-élű út. (Segítség: Menger!)
3. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$ -féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.