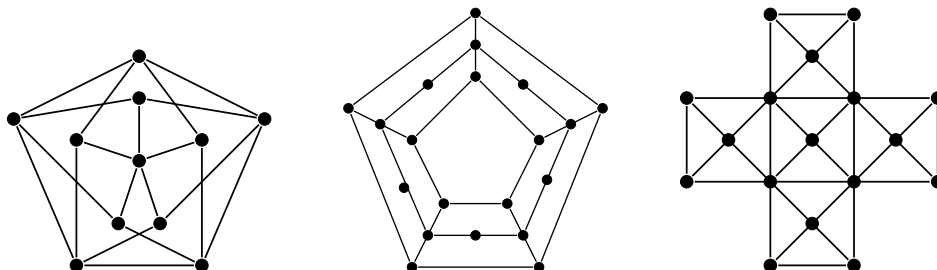


Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2012. október 12.

Hamilton-kör, Hamilton-út

- (a) Bejárható-e a 4×4 -es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2 -es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8 -as), (c) 3×5 -ös, (d) 3×6 -os sakktábla esetén?
- Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetőek úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
- Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ -pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G -nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
- Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G -nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.
- Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.
- A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G -ben van Hamilton-út!
- Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?
- Bizonyítsuk be, hogy ha n egynél nagyobb páratlan szám, akkor $L(K_n)$ -nek, az n pontú teljes gráf élgráfiának van Hamilton-köre.
- Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?
- Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
- Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
 - G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
 - G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
- Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?



- Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

Házi feladatok

1. Hány különböző Hamilton-köre van a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfnak? ($n \geq 2$).
2. Legfeljebb hány éle lehet egy hat csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?