Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2012. szeptember 28.

Fák, Prüfer-kód, minimális összsúlyú feszítőfa

1. Egy fa Prüfer kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha F fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az F-beli csúcsok maximális fokszáma.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.
4. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$ ill. $(5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)$?
5. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
6. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)
7. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?
8. A $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n-2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?
9. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \dots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartamazza?
10. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy $d_1, d_2, \dots, d_n$ egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.
11. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.
12. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)
13. Adjunk meg tetszőleges k-hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.
14. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G-ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G-ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
15. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a $v_1, v_2, \dots, v_n$ pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
16. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
17. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.

18. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?

    Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?

Házi feladat

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, amelynek $v_1 v_2$ éle?
2. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.