

## Kombinatorika és gráfelmélet 1.

3. gyakorlat, 2012. szeptember 21.

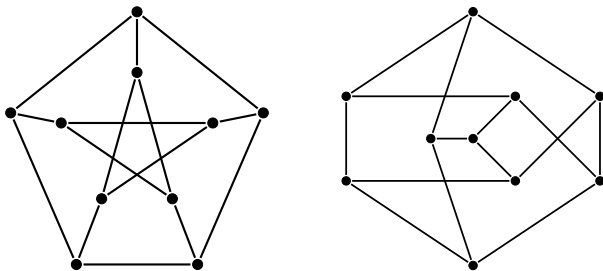
### Gráfelméleti alapfogalmak, fák

1. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges  $n$  pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan  $(n - 3)$ -mal egyenlő!
2. Igazoljuk, hogy ha  $G$  véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
3. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
4. Igazoljuk a következő állítást. Ha  $T_1$  és  $T_2$  két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és  $e_1$   $T_1$  éle, akkor létezik  $T_2$ -nek egy  $e_2$  éle, hogy  $T_1 - e_1 + e_2$  és  $T_2 - e_2 + e_1$  is fa.
5. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
6. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
7. Igazoljuk, hogy ha egy  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)

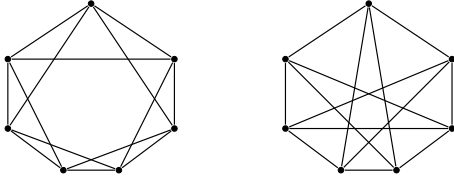
8. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.
9. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges  $G$  gráfra fennáll, hogy  $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$ , ahol  $c(G)$  a  $G$  gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.
10. Mi lehet a  $G$  gráf, ha  $\Delta(G) \leq 2$ ? ( $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát jelöli.)
11. Igazoljuk, hogy az alábbi két gráf izomorf!



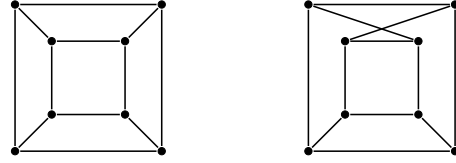
12. Mutassuk meg, hogy ha egy  $n$  csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely  $n$  csúcsú fa, és minden éle azonos színű.
13. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélek. Mi lehet ez a két szám?

14. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?

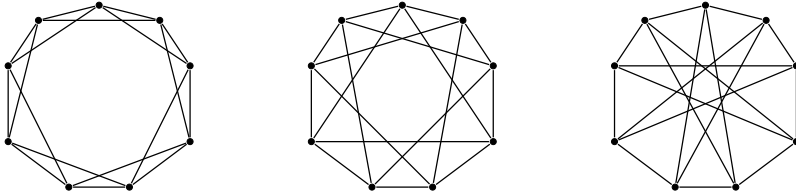
(a)



(b)



15. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



16. Adjuk meg az összes önkomplementer fát!

17. Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az  $F$ -beli csúcsok maximális fokszáma.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább  $\frac{2}{3}$  része levél.

19. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.

### Házi feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.

(Igazából az *összes* leghosszabb útnak is van közös csúcsa!)

2. Hány pontja van annak a  $T$  fának, melyre  $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$ ?