

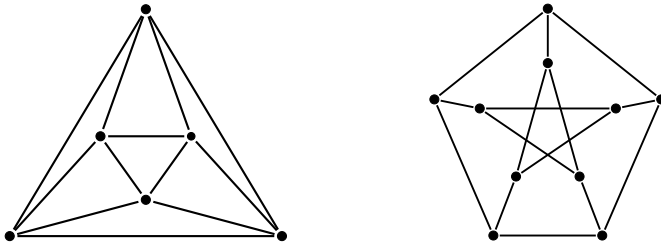
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

12. gyakorlat, 2012. november 30.

Kromatikus szám, élkromatikus szám

1. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \dots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
2. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
3. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
4. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs közöttük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
5. Van-e olyan G gráf, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?
6. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$ (ill. $\chi(G) \leq 3$)?
7. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan v csúcsa, hogy v -nek minden más színosztályban van szomszédja.
8. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.
9. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?
10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
11. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G -ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
12. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
13. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
14. Ha az n -csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, akkor legalább $2n - 3$ éle van. (*)
15. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező siktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
16. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetőek úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
17. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler körsétát, és melyeknek van Hamilton körük?
18. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r -reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.
19. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
20. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.

21. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfja komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
 (A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$ -beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G -beli éleknek van közös végpontjuk.)
22. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



Házi feladatok

- Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.
- Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.