Kombinatorika és gráfelmélet 1.

11. gyakorlat, 2012. november 16.

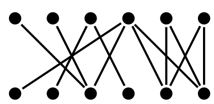
Párosítások páros, ill. tetszőleges gráfban, görög betűk, kromatikus szám

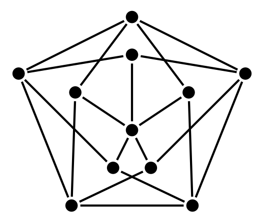
$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

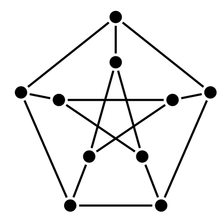
$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

$\chi(G)$: kromatikus szám; $\omega(G)$: klikkszám.

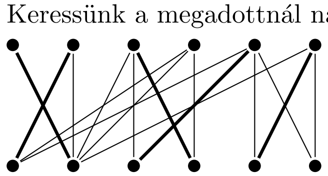
1. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
2. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.
3. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.
4. Mutassuk meg, hogy ha G olyan $(n-1)$-öf, $2n$ csúcsú gráf, amire $\tau(G) \geq n$, akkor G-nek van teljes párosítása.
5. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?
6. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!
7. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



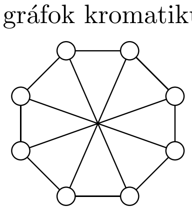


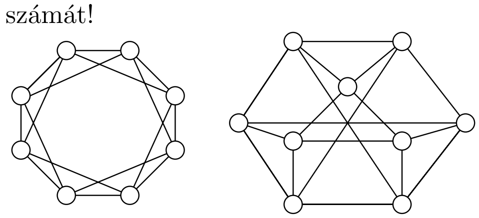


8. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i+j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.
9. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i+j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!
10. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n-1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?
11. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n-1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.
12. Keressünk a megadottnál nagyobb méretű párosítást az alábbi gráfban!



13. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!





14. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

15. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?

16. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?

17. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

18. Van-e olyan G gráf, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?

19. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$ (ill. $\chi(G) \leq 3$)?

20. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.

21. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.

22. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

23. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

24. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.

25. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

26. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)

27. Ha az n-csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, akkor legalább $2n - 3$ éle van. (*)

28. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.

29. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.

Házi feladatok

1. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?

2. (a) Jelölje $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát, $\tau(G)$ pedig a lefogó pontok minimális számát. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G) \cdot \tau(G) \geq |E(G)|$.
   (b) Jelölje $\omega(G)$ a G gráf egyik maximális klikkjének méretét, azaz G komplementerének függetlenségi számát. Mutassuk meg, hogy $\alpha(G) + \omega(G) \leq |V(G)| + 1$.

3. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.