

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2012. szeptember 7.

Elemi leszámítások, szita-formula

- A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?
 - Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?
 - A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. A biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?
 - Hány ötösloottó szelvényt kell kitöltenünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatosloottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találatához (a tizenháromból)?
- Hányféleképpen állhat sorba n fiú és n lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?
- Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
- Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?
 - És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?
 - Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?
 - Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepel az 5-ös számjegy? (Egy szám nem kezdődhet 0-val).
- Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?
- Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemszámú részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?
- Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?
- Minimálisan hány töréssel lehet egy 4×5 -ös csokitáblát egyes kockákra tördelni?
- Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? (Mik a válaszok futókra?(*))
- Bizonyítsd be, hogy bármely pozitív egész n számra $\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$.
- Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
- Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötösloottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
- Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba $2n$ különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?
- Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K		T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A
- Nyolc ember szeretne teniszezni három tenispályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két tételét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)

16. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?
17. Egy moziban n széksor van, az egyes sorokban k_1, k_2, \dots, k_n szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben m embert? Hát egy k székből álló sorba hányféleképp ülhet le l házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
18. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?
19. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezéskor a közeli barátok kezét fogják (a nők is). Természetesen senki sem fog kezét a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogtak kezét, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezét Kovácsné? (*)
20. Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor $\phi(n) = n \prod_{p|n, p \text{ prím}} (1 - \frac{1}{p})$ az n -nél kisebb, n -hez relatív prím pozitív egészek száma.
21. Igazoljuk, hogy 2008 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2008 többszöröse legyen.
22. Mennyi n elem fixpont nélküli permutációinak száma? (Azaz az olyan permutációk száma érdekel bennünket, melyben semmilyen $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ elemre sem teljesül, hogy éppen az i . helyen állna.) Ha ez az érték $f(n)$, akkor mennyi az $f(n)/n!$ arány limesze, ha n tart végtelenhez?
23. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.
24. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (*)
25. Az amerikai biliárd 15 számozott golyójának egy bizonyos játéknál olyan sorrendben kell a biliárdasztal lyukaiba gurulnia, mely teljesíti az alábbiakat.
Az elsőként leguruló golyó tetszőleges. Minden $k \geq 1$ -re igaz, hogy az első k legurult golyó sorszámaiból álló halmaz k egymást követő pozitív egész szám halmaza. Hány különböző érvényes legurulási sorrendje van a 15 golyónak?
26. A 65 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni a kombi előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnayitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?
27. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessek? (*)

Házi feladatok

1. Egy n oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében?
2. Hány olyan k elemű részhalmaza van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, amely nem tartalmaz két szomszédos számot? ($1 \leq k \leq n/2$)