Kombinatorika és gráfelmélet 1.

9. gyakorlat, 2017. április 6.

Csúcsszínezés, élszínezés

Tudnivalók

$\chi(G)$: G kromatikus száma, G csúcsainak a kiszínezéséhez szükséges színek minimális száma. (Úgy, hogy bármely két összekötött pont különböző színű.)

$\Delta(G)$: maximális fokszám G-ben. $\omega(G)$: G klikkszáma, a legnagyobb teljes részgráf mérete.

Minden G gráfra $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Brooks tétel: Ha G összefüggő, nem teljes gráf és nem páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

gyenge Brooks tétel: Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Tétel: Minden pozitív egész k ra létezik olyan G_k gráf, melyre $\omega(G_k) = 2$, és $\chi(G_k) = k$.

Feladatok

1. (Zykov konstrukció) Legyen $Z_2 = K_2$. Tegyük fel, hogy már megkonstruáltuk a Z_k gráfot. Legyen Z_{k+1} a következő gráf. Vegyük Z_k k darab diszjunkt példányát, minden lehetséges módon válasszunk ki egy-egy csúcsot mindegyik példányból, vegyünk fel ehhez a k-ashoz egy új csúcsot, es kössük össze a k-as elemeivel. Biz: minden k-ra $\omega(Z_k) = 2$ és $\chi(Z_k) = k$.
2. Van-e a Z_k Zykov gráfnak Hamilton-köre?
3. (Mycielski konstrukció) Legyen $M_2 = K_2$. Tegyük fel, hogy $k \geq 2$ és már meghatároztuk az M_k Myczielski gráfot. Legyenek M_k cscsai $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Az M_{k+1} gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_m$, $u_1, u_2, \ldots, u_m$ és w. A $v_1, v_2, \ldots, v_m$ csúcsok éppen az M_k Myczielski gráfot feszítik, az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ csúcsok között nincs él, egy u_i és egy v_j csúcsot pontosan akkor kötünk össze, ha v_i és v_j össze van kötve. Végül pedig w-t kössük össze az $u_1, u_2, \ldots, u_m$ csúcsokkal. Így kaptuk az M_k Myczielski gráfot.
   a. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges k-ra $\omega(M_k) = 2$, vagyis M_k nem tartalmaz háromszöget.
   b. Bizonyítsuk be, hogy minden k-ra $\chi(M_k) = k$.
4. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler-körsétát, és melyeknek van Hamilton-körük?
5. Van-e az $\binom{m}{2}$ pontú S_m shiftgráfnak Euler-körsétája?
6. (*) Tegyuk fel, hogy az n csúcsú G gráf egyértelműen 3-színezhető, azaz bármely két 3-színezésében ugyanazok a színosztályok. Bizonyítsuk be, hogy G-nek legalább $2n - 3$ éle van.
7. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
8. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i-j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
9. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
10. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
11. Mutassunk olyan G gráfot, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel.
12. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésében bármely színosztálynak van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.

13. Igazoljuk, hogy tetszőleges irányítatlan G gráfnak van olyan irányítása, ami nem tartalmaz $\chi(G)$ élű irányított utat.
14. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
15. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
16. Igazoljuk, hogy tetszőleges n csúcsú, egyszerű G gráfra $\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq n$ teljesül.
    Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$. (*)
17. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.
18. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
19. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
20. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.
21. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.
22. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.
23. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.
24. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfjának a komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
25. Mennyi az oktaéder élgráfjának ill. a Petersen gráfnak az élkromatikus száma?

Házi feladatok

1. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.
2. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan színezése $\chi(G)$ színnel, amelyre valamelyik színosztály $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?