Kombinatorika és gráfelmélet 1.

7. gyakorlat, 2017. március 23.

Páros gráfok és gráfparaméterek

Tudnivalók

Def. A $G = (V, E)$ gráf pontjainak $U \subseteq V$ halmaza *független*, ha U-beli pontok között nem fut él. Az U halmaz lefogó, ha $G - U$ üresgráf, azaz G minden élének van U-beli végpontja. Az F élhalmaz *független*, ha $d_F(v) \leq 1$ teljesül minden v csúcsra, azaz, ha az F-beli élek diszjunktak és nincs köztük hurokél. Az F élhalmaz *lefogó* tulajdonságú, ha $V(F) = V(G)$, azaz G minden pontjából indul F-beli él. *Párosítás* alatt független élhalmazt értünk, a *teljes párosítás* (más néven 1-*faktor*) pedig az olyan párosítás, ami G minden pontját fedi.

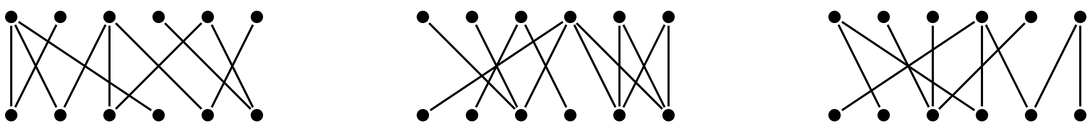
$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;

$\nu(G)$: független élek maximális száma (maximális párosítás mérete); $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.

Def. A $G = (V, E)$ gráf *páros*, ha léteznek A és B diszjunkt halmazok úgy, hogy $A \cup B = V$ és G minden élének van A-beli és B-beli végpontja is.

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy $M \subset E(G)$ egyszerre lefogó és független élhalmaz G-ben. Mit mondhatunk M-ről?
2. Tegyük fel, hogy $U \subset V(G)$ egyszerre lefogó és független ponthalmaz G-ben. Mit mondhatunk G-ről?
3. Igazoljuk, hogy páros gráfban nem lehet páratlan kör. Igaz-e, hogy ha egy G gráf nem tartalmaz páratlan kört, akkor G páros gráf?
4. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $\nu(G) \leq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll, és olyat is, amire nem.
5. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll, és olyat is, amire nem.
6. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)
7. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



8. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.
9. Igazoljuk, hogy ha G r-reguláris páros gráf és $r \geq 1$, akkor G-nek van teljes párosítása.
10. A G irányított gráf minden csúcsának ki- és befoka egyaránt $k \geq 1$. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?
11. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.
12. Igazoljuk Berge alábbi tételét. Az G gráf M párosítására pontosan akkor teljesül az $\alpha(G) = |M|$ egyenlőség, ha G-ben ne vezet olyan út két M által fedetlen pont között, amelynek minden második éle M-beli.

Házi feladatok

1. Minden $k \geq 3$ egész számra konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.
2. Legyen a 100 csúcsú, egyszerű G gráfnak X egy 52 pontból álló független ponthalmaza és legyenek x, y és z különböző X-beli csúcsok. Tartalmazhat-e a $G + xy + yz + zx$ gráf teljes párosítást?