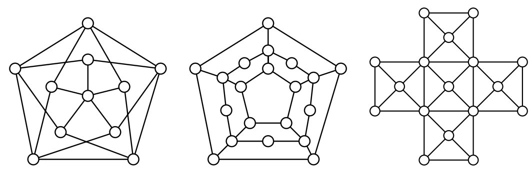
Kombinatorika és gráfelmélet 1.

4. gyakorlat, 2017. március 2.

Hamilton-kör, Hamilton-út

1. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?
2. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.
4. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.
5. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.
6. A G egyszerű gráfnak $2n+1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!
7. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0,1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n=4$ esetben $(0,0,0,1)$ és $(0,1,0,1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Hamilton-köre?
8. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1,2,\ldots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i-j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?
9. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
10. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
(a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
(b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x,y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;
(c) G_n a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfot jelöli és $n \geq 2$.



11. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út a fenti gráfokban?
12. Legalább hány éle van egy olyan $n=6$ pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
13. Legfeljebb hány éle lehet egy hat (n) csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?
14. Legyen G egy n csúcsú gráf. Ha találunk két nem szomszédos u, v csúcsot, amelyekre $d(u)+d(v) \geq n$, akkor húzzuk be az uv élet. Ismételjük az eljárást amíg el nem akadunk.

    Előfordulhat, hogy ezt az eljárást többféleképpen is végrehajthatjuk, mert egy lépésben több lehetséges él közül is választhatunk. Bizonyítsuk be, hogy akárhogyan hajtjuk végre az eljárást, az eredményként kapott gráf mindig ugyanaz. (Ezt nezezzük G lezárjának.)
15. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű, 100 pontú G gráfban minden pont foka 20 vagy 80, továbbá minden 20-adfokú ponthoz van legalább 30 db 80-adfokú, amellyel nem szomszédos, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Házi feladatok

1. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris feszítő részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig 1-reguláris feszítő részgráfja?
(Egy gráfot *k-regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k. Egy részgráfot *feszítő részgráfnak* nevezünk, ha az eredeti gráf összes pontját tartalmazza.)
2. Tegyük fel, hogy G egy összefüggő gráf, és hogy K egy olyan köre G-nek, amelynek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja lesz. Bizonyítsuk be, hogy ekkor K Hamilton-köre G-nek.