

Kombinatorika és gráfelmélet 1.

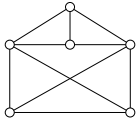
3. gyakorlat, 2017. február 23.

Prüfer-kód, minimális súlyú feszítőfa, Euler kör

1. Egy fa Prüfer kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?
2. Bizonyítsuk be, hogy ha F fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az F -beli csúcsok maximális fokszáma.
3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.
4. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$ ill. $(5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)$?
5. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
6. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)
7. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?
8. A $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n - 2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?
9. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \dots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartalmazza?
10. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy d_1, d_2, \dots, d_n egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2$.
11. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa. Igaz-e ugyanez fa helyett tetszőleges összefüggő gráfra?
12. Bizonyítsuk be, hogy egy fában az összes leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*) Igaz-e ugyanez fa helyett tetszőleges összefüggő gráfra?
13. Adott n város, bármely kettő között van repülőjárat, de csak az egyik irányban. Mutassuk meg, hogy van olyan város, melyből bármely másik elérhető legfeljebb egy átszállással.
14. Adott r darab, egyenként k csúcsú pontdiszjunkt fa. Hányféleképpen egészíthető ki ez az r fa egyetlen $k \cdot r$ csúcsú fává? (A kiegészítés úgy értendő, hogy az r fa mindegyike részgráfja lesz a keletkező $k \cdot r$ csúcsú fának.)
15. Adjunk meg tetszőleges k -hoz k darab nem izomorf fát, amelyeknek ugyanaz a fokszám sorozata.
16. Milyen k pozitív egészekre adható meg olyan 2000 élű és 2000 csúcsú összefüggő gráf, amire igaz a következő: G -ben a 2000 él közül adható egynek 2 egységnyi, 1999-nek 1 egységnyi súly úgy, hogy a G -ből kiválasztható különböző minimális súlyú feszítőfák száma éppen k legyen? (A feszítőfák megkülönböztetésekor a gráf csúcsait címkézettnek tekintjük.)
17. Legyenek az G teljes gráf csúcsai a v_1, v_2, \dots, v_n pontok, és legyen a $v_i v_j$ él súlya $\max(i, j)$. Határozzuk meg a G gráf minimális súlyú feszítőfáinak számát.
18. Bizonyítsuk be, hogy az élsúlyozott G gráf $e = uv$ élére pontosan akkor igaz, hogy e a G minden minimális súlyú feszítőfájának éle, ha $V(G)$ felbontható két diszjunkt ponthalmaz uniójára úgy, hogy u és v különböző halmazokban legyenek, továbbá a két ponthalmaz között e az egyedüli legkisebb súlyú él.
19. Tegyük fel, hogy egy súlyozott élű gráfban pontosan két minimális súlyú feszítőfa van. Bizonyítsuk be, hogy ekkor ezek csak egy élben térnek el egymástól.
20. Ha egy súlyozott élű gráfban vannak egyforma súlyú élek, akkor elképzelhető, hogy a mohó algoritmus többféleképpen is lefuthat. Bizonyítsuk be, hogy minden minimális összsúlyú feszítőfa megkapható a mohó algoritmus megfelelő futtatásával.

21. Igazoljuk, hogy ha a G gráf minden fokszáma páros, akkor $E(G)$ előáll éldiszjunkt körök uniójaként.
22. Igazoljuk, hogy ha G összefüggő és minden fokszáma páros, akkor G -ből elhagyhatók G egy körének élei úgy, hogy a kapott gráf izolált pontoktól eltekintve összefüggő maradjon.
23. Bizonyítsuk be, hogy egy *irányított* G gráfnak (amelynek nincs izolált pontja) akkor és csak akkor van irányított Euler köre, ha G minden v pontjának befoka egyenlő v kifokával ($\rho(v) = \delta(v)$), és G irányítatlan változata összefüggő.
24. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler köre?
25. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmozából páros sok él indul a komplementerébe.
26. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \dots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G -ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler kört, illetve Euler utat?
27. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler köre, akkor G élgráfiának, $L(G)$ -nek is van Euler köre!

(A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$ -beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G -beli éleknek van közös végpontjuk.)

28. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
29. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, és pedig mindkét irányban egyszer-egyszer.
30. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G -ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G -ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?
31. Minimálisan hányszor kell felemelni a ceruzánkat, hogy lerajzoljuk az alábbi gráfot úgy, hogy minden élt pontosan egyszer rajzolunk le és másik élre csak a gráf csúcsainál válthatunk? 
32. Melyek azok az irányítatlan gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.) Mi a helyzet irányított gráf esetén?
33. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
 - (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G -nek is van.
 - (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G -nek is van.
 - (c) Ha G -ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
 - (d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G -ben is van.

Házi feladatok

1. Egy n csúcsú teljes gráf minden élének más a súlya. Bizonyítsuk be, hogy csak egy minimális összsúlyú feszítőfája van.
2. Hogyan súlyozzuk egy n csúcsú teljes gráf éleit úgy, hogy a súlyok összege 1, és a minimális feszítőfa súlya a lehető legnagyobb?

Mennyi az így kapott minimális feszítőfa súlya?