

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

2. gyakorlat, 2017. február 16.

## Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Prüfer-kód

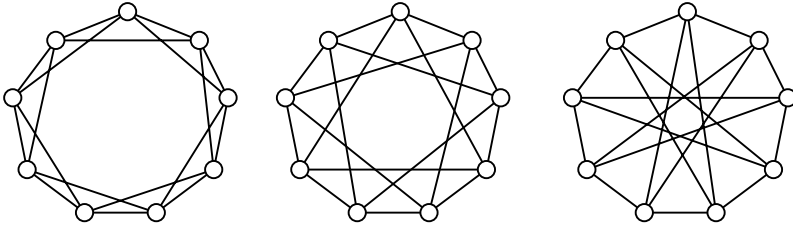
1. Egy  $3 \times 3$  méretű sakktábla négy sarkába két világos és két sötét huszárt állítunk úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes sarkokban álljanak. Elérhető-e ebből az állapotból a huszárokkal a szokásos lépéseket végezve az, hogy a tábla négy sarkában álljanak a huszárok, de az átellenesek különböző színűek legyenek? (A lépéssorozat alatt egy mezőn sosem állhat egynél több figura.)
2. Rajzoljunk olyan egyszerű gráfokat, amiknek rendre 6, 7, 8, 9 csúcsa van és minden csúcs foka 3.
3. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre  $v = 4$ ,  $e = 5$ , ill.  $v = 5$ ,  $e = 3$ , ill.  $v = 5$ ,  $e = 7$ , ill.  $v = 5$ ,  $e = 8$ , teljesül, ahol  $v$  jelöli a pontok számát,  $e$  pedig az élek számát!
4. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző (páronként nem izomorf) egyszerű gráf létezik?
5. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre 1, 2, 2, 3, 3, 3 ill. 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4 ill. 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7 ill. 1, 3, 3, 4, 5, 6, 6.
6. Bizonyítsuk be, hogy ha  $G$  tetszőleges egyszerű gráf, akkor a  $G$  vagy  $\bar{G}$  gráfok valamelyike összefüggő!
7. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges  $n$  pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan  $(n - 3)$ -mal egyenlő!
8. Az előre megszámozott (címkézett)  $n$  darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
9. Igazoljuk, hogy ha  $G$  véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
10. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
11. Mutassuk meg, hogy ha  $G$  egyszerű gráf, akkor élei irányíthatóak úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
12. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal parkettáztunk. Tegyük fel továbbá, hogy a parketta-téglalapok mindegyikének van egész hosszúságú oldala. Igazoljuk, hogy a kiparkettázott (nagy) téglalapnak is van egész hosszúságú oldala.\*
13. Igazoljuk a következő állítást. Ha  $T_1$  és  $T_2$  két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és  $e_1$   $T_1$  éle, akkor létezik  $T_2$ -nek egy  $e_2$  éle, hogy  $T_1 - e_1 + e_2$  és  $T_2 - e_2 + e_1$  is fa.
14. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
15. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
16. Hány pontja van annak a  $T$  fának, melyre  $|E(\bar{T})| = 15 \cdot |E(T)|$ ?
17. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másiktól egy „forgatással” megkapható, azaz ha az egyik a  $(b_1, b_2, b_3, b_4)$  akkor a másik a  $(b_2, b_3, b_4, b_1)$  sorozathoz tartozó pont.
18. Igazoljuk, hogy ha egy  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$  sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$$

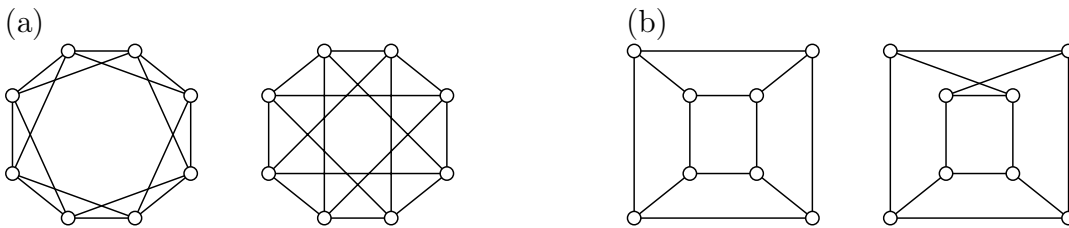
(Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)

19. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.
20. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges  $G$  gráfra fennáll, hogy  $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$ , ahol  $c(G)$  a  $G$  gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.

21. Mi lehet a  $G$  gráf, ha  $\Delta(G) \leq 2$ ? ( $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszámát jelöli.)
22. Mutassuk meg, hogy ha egy  $n$  csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely  $n$  csúcsú fa, és minden éle azonos színű.
23. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
24. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?



25. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.
26. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?



27. Egy fa Prüfer kódja  $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$ . Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?
28. Bizonyítsuk be, hogy ha  $F$  fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az  $F$ -beli csúcsok maximális fokszáma.
29. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább  $\frac{2}{3}$  része levél.
30. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz:  $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ ,  $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$ ,  $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$  ill.  $(5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)$ ?
31. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
32. Hány olyan fa adható meg  $n$  címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)
33. Hány olyan fa adható meg  $n$  címkézett ponton, melynek az  $n$  pont levele?
34. A  $V = \{1, 2, \dots, 2n\}$  (számozott) pontokon hány olyan egyszerű  $G$  gráf adható meg, melynek  $2n - 2$  éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?
35. Hány különböző olyan fa adható meg az  $1, 2, \dots, 8$  címkézett csúcsokon, ami az  $\{1, 2\}$ ,  $\{3, 4\}$ ,  $\{5, 6\}$ ,  $\{7, 8\}$  élek közül legalább az egyiket nem tartalmazza?
36. Legyen  $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n \geq 1$ . Bizonyítsuk be, hogy  $d_1, d_2, \dots, d_n$  egy ( $n$  csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha  $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2n - 2$ .
37. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.
38. Bizonyítsuk be, hogy egy fában az összes leghosszabb útnak van közös csúcsa. (\*)

### Házi feladatok

1. Adjuk meg az összes önkomplementer fát!
2. Hány olyan fa van a  $v_1, v_2, \dots, v_n$  csúcsokon, amelyek  $v_1 v_2$  éle?