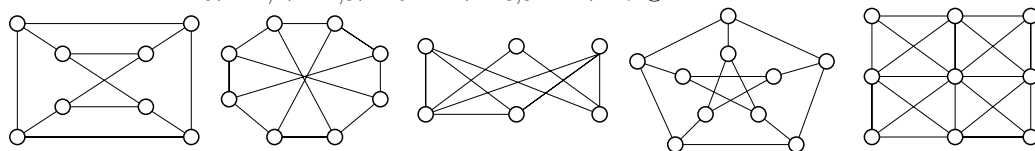


Kombinatorika és gráfelmélet 1.

11. gyakorlat, 2017. április 20.

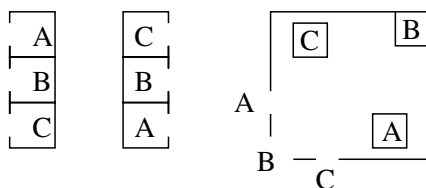
Síkgráfok

1. Egy egyszerű, $n \geq 3$ csúcsú síkbarajzolt G gráf minden tartománya háromszög. Bizonyítsuk be, hogy G -nek pontosan $3n - 6$ éle van.
2. Hány csúcsa van annak a síkbarajzolható gráfnak, amit 3 háromszög-, 3 négyszög- és egy ötszöglap határol?
3. Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + e(G) - 2t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 100 csúcsú összefüggő egyszerű síkbarajzolt gráf lehet.
4. Igazoljuk, hogy ha G n pontú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor
 - a) G egyúttal tóruszra is rajzolható;
 - b) G bármely síkbarajzolásakor ugyanannyi tartomány keletkezik;
 - c) ha G -nek $3n - 6$ -nál kevesebb éle van, akkor behúzható G -be új él úgy, hogy továbbra is egyszerű, síkbarajzolható gráfot kapjunk;
 - d) G -nek vagy van legfeljebb harmadfokú csúcsa vagy G tetszőleges síkbarajzolásának van háromszöglapja.
5. Adjunk meg olyan 8 csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráfot, aminek a komplementere is síkbarajzolható!
6. Mutassuk meg, hogy ha $|V(G)| \geq 11$, akkor G és \bar{G} egyike biztosan nem síkgráf.
7. Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (még hozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!
8. Bizonyítsuk be, hogy minden síkbarajzolt G gráf 3-összefüggővé tehető további élek behúzásával a síkbarajzolttság megtartása mellett. Igazoljuk, hogy ha G síkbarajzolt és minden lapja háromszög, akkor G 3-összefüggő.
9. Mutassuk meg, hogy ha egy G egyszerű síkgráfban a legrövidebb kör hossza g , akkor $|E(G)| \leq \frac{g}{g-2}(n-2)$.
10. Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
11. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
12. Síkbarajzolhatók-e a K_6 , $K_{4,2}$, $K_{4,3}$, $K_5 - e$, $K_{3,3} - e$, \bar{C}_7 gráfok? Hát az alábbiak?



13. Bizonyítsuk be, hogy minden egyszerű síkbarajzolható gráfban
 - a) a minimális fokszám legfeljebb 5;
 - b) ha a minimális fokszám 5, akkor legalább 12 ötödfokú pont van.
14. Egy gráfban minden pont foka legfeljebb 3, és minden köre legfeljebb 5 hosszú. Mutassuk meg, hogy a gráf síkgráf!
15. Jelölje $cr(G)$ a G gráf síkra való lerajzolásakor létrejövő élkereszteзések lehetséges minimális számát. Mennyi $cr(K_{4,4})$ értéke? Mennyi $cr(K_6)$?
16. Bizonyítsuk be hogy $cr(K_{5,5}) \geq 11$.

17. Mutassuk meg, hogy a K_7 és a $K_{4,4}$ gráfok mindegyike tóruszra rajzolható. Bizonyítsuk be, hogy ha G síkbarajzolt gráf, akkor G -be tetszőleges élt behúzva tóruszra rajzolható gráfot kapunk.
18. Bizonyítsuk be, hogy egy 4-reguláris egyszerű páros gráf nem lehet síkbarajzolható!
19. Mészga Aladár (A), Doktor Bubó (B) és Csörmeister (C) egy sorházban laknak, egymás mellett, míg a garázsaik egy másik épületben, ugyancsak egymás mellett vannak. (Ld. a bal oldali ábrát.) Sajnos nagyon rosszban vannak, ezért úgy szeretnék utakat építeni mindhárom lakástól a megfelelő garázsig, hogy az utak ne keresztezzék egymást. Vajon lehetséges ez? (*)
- Ráadásul hőseink nyaralói is egy közös kertben vannak, ahol mindenkinek saját kapuja van, a jobb oldali ábra szerint. Vajon itt meg tudják építeni az utakat a három háztól a megfelelő kapukig úgy, hogy azok ne keresztezzék egymást?



1. ábra. Mészga Aladár, Doktor Bubó és Csörmeister lakása és garázsa.

20. Mutassuk meg topológiai módszerrel, hogy sem a K_5 , sem a $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható. (*)
21. (Hanani-Tutte tétel) Egy gráfot sikerült úgy lerajzolnunk, hogy bármely két éle páros sokszor metszi egymást. Bizonyítsuk be, hogy síkgráf! (*)

Házi feladat.

- Mutassuk meg, hogy ha a G síkbarajzolt gráf minden lapját páros számú él határolja, akkor G páros gráf.
- Tetszőleges G síkbarajzolt gráfra legyen $n(G)$ a csúcsok, $e(G)$ az élek, $t(G)$ a tartományok száma. Határozzuk meg az $n(G) + 2e(G) - t(G)$ mennyiség maximumát, ha G bármilyen 2017 csúcsú egyszerű összefüggő síkbarajzolt gráf lehet.