

# Kombinatorika és gráfelmélet 1.

1. gyakorlat, 2017. február 9.

## Elemi leszámolások, szita-formula

- (a) A cirkusz porondjára 3 tigris, 4 oroszlán és 2 párduc vonul be libasorban. Hányféle lehet a sorrend, ha az azonos fajú állatokat nem tudjuk megkülönböztetni?
  - (b) Egy versenyen 22-en indulnak; az újságok az első nyolc helyezett nevét közlik. Hányféle lehet ez a lista?
  - (c) A biciklis klub tagjai négyjegyű tagsági számokat kapnak. A biciklisták babonásak, félnek a 8-astól. Hány olyan tagsági szám lehet, amiben nincs 8-as (de 0-val kezdődhet)?
  - (d) Hány ötösloottó szelvényt kell kitölteniünk, hogy biztosan legyen telitalálatosunk? És hatosloottó szelvényt? Hány szelvény szükséges a totón a legalább öt találathoz (a tizenháromból)?
- Hányféleképpen állhat sorba  $n$  fiú és  $n$  lány úgy, hogy azonos neműek ne álljanak egymás mellett?
- Hányféleképpen juthatunk el New Yorkban a 14. utca és a 10. avenue sarkáról a 23. utca és az 5. avenue kereszteződésébe, ha mindig közterületen kell a cél felé haladnunk?
- (a) Egy 15 tagú klub elnököt, titkárt és jegyzőt választ. Hányféleképpen tehetik ezt?
  - (b) És ha a népszerű Kovács úrnak mindenképpen szeretnének valamilyen tisztséget adni?
  - (c) Egy gimnáziumban 16 osztály van, az osztálylétszám mindenütt 40. Mindegyik osztály 5 tagú küldöttséget küld az iskolai diákbizottságba. Hányféle lehet a diákbizottság összetétele?
  - (d) Hány olyan tízjegyű szám van, amelyben szerepel az 5-ös számjegy? (Egy szám nem kezdődhet 0-val).
- Tudományosan igazolt tény, hogy az atlantiszi országok zászlaja 3 vízszintes sávból áll, minden sáv a piros, fehér, zöld, kék, sárga, fekete színek valamelyikére van színezve, úgy, hogy a szomszédos sávok különböző színűek legyenek. Természetesen különböző országok lobogói egymástól különbözőek. Legfeljebb hány ország létezhetett Atlantiszban? Legfeljebb hány olyan ország lehet, melynek zászlajában van piros sáv?
- Egy 99 elemű halmaznak páros vagy páratlan elemszámú részhalmazából van-e több? Hát egy 100-elemű halmaznak?
- Feldobunk tíz egyforma dobókockát. Hányféle lehet az eredmény?
- Minimálisan hány töréssel lehet egy  $4 \times 5$ -ös csokitáblát egyes kockákra tördelni?
- Hány bástyát lehet elhelyezni úgy a sakktáblán, hogy egyik se üsse a másikat? És hányféleképpen helyezhető el ez a maximális számú bástya a sakktáblán úgy, hogy ne álljanak ütésben? Mik a válaszok futókra? (\*)
- Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész  $n$  számra (i)  $\sum_{i=1}^n i \binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$ , (ii)  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$ .
- Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
- Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötösloottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
- Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba  $2n$  különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?
- Hányféleképpen lehet az alábbi táblázatból kiolvasni a METAMATEMATIKATEMATIKA szót, ha csak jobbra és lefelé haladhatunk?

M	E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A
E	T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T
T	A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E
A	M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M
M	A	T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A
A	T	E	M	A	T	I	K	♠	T	E	M	A	T
T	E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I
E	M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K
M	A	T	I	K	A	T	E	M	A	T	I	K	A

15. Nyolc ember szeretne teniszezni három teniszpályán úgy, hogy az egyik pályán párost, a két másikon egyénit játszanak. Hányféleképpen tehetik ezt meg, ha a pályákat különbözőeknek tekintjük, de ugyanazon pálya két téréfelét nem különböztetjük meg? (Természetesen az embereket is különbözőeknek tekintjük, és az is számít, hogy a négy páros meccset játszó játékos között ki kinek a partnere.)
16. Hányféleképp osztható egy 30 fős osztály hat, ötfős csapatra?
17. Egy moziban  $n$  széksor van, az egyes sorokban  $k_1, k_2, \dots, k_n$  szék. Hányféleképp ültethetünk le a teremben  $m$  embert? Hát egy  $k$  székből álló sorba hányféleképp ülhet le  $l$  házaspár, ha a párok egymás mellé ülnek?
18. Kovács úr és neje négy másik házaspárt lát vendégül. Megérkezésük a közeli barátok kezét fogják (a nők is). Természetesen senki sem fogja kezét a házastársával. Az este egy későbbi pillanatában Kovács úr megkérdezi a jelenlévőket, hogy hányszor fogták kezét, s erre csupa különböző választ kap. Hány emberrel fogott kezét Kovácsné? (\*)
19. Bizonyítsuk be, hogy ha  $n$  természetes szám, akkor  $\varphi(n) = n \prod_{p|n, p \text{ prím}} (1 - \frac{1}{p})$  az  $n$ -nél kisebb,  $n$ -hez relatív prím pozitív egészek száma.
20. Igazoljuk, hogy 2008 tetszőlegesen megadott egész számból kiválasztható néhány úgy, hogy az összegük 2008 többszöröse legyen.
21. Igazoljuk, hogy tetszőleges  $n, k > 1$  egészek esetén megadható olyan  $a_1, a_2, \dots, a_{nk}$  sorozat, amely nem tartalmaz sem  $n + 1$  tagú növekedő, sem  $k + 1$  tagú csökkenő részsorozatot.
22. Egy  $n$  oldalú konvex sokszög belsejében nincs olyan pont, amelyen a sokszög kettőnél több átlója halad át. Hány metszéspontja van a sokszög átlóinak a sokszög belsejében? (\*)
23. A 65 fős évfolyamból néhány embernek (legalább egynek) el kell menni a kombi előadásra, néhánynak (legalább egynek) az évnnyitóra, néhánynak (legalább egynek) meg a kocsmába, de ezek egyszerre vannak, hányféleképpen tehetik ezt meg?
24. 10 rabló egy rengeteg lakattal lezárható ládába gyűjti a rabolt kincset. Úgy szeretnék a ládát lelakatolni, és kiosztani a kulcsokat (egy lakathoz többen is kaphatnak kulcsot), hogy bármely 4 rabló ki tudja nyitni a ládát, de ez semelyik 3 rablónak ne sikerülhessen. Legalább hány különböző lakatot kell „venniük” a vasboltban, hogy ezt megtehessék? (\*)
25. 70 tolmács közül bármely kettőre igaz, hogy mindketten ismernek olyan nyelvet, amit a másik nem. Összesen legalább hány nyelvet beszélnek? (\*)
26. A HK 18 vezetőjéből hányféleképpen lehet a gólyatábor 9 fős szervezőbizottságát úgy megválasztani, hogy a 7 büntetett előéletű tagból legfeljebb 3 kaphasson helyet a testületben? (\*)

### Házi feladatok

1. Hányféleképpen állhat fel fotózáshoz két egymás mögötti sorba  $2n$  különböző magasságú ember úgy, hogy minden hátsó sorban álló magasabb legyen annál, aki az első sorban közvetlenül előtte áll?
2. Hány olyan  $k$  elemű részhalmaza van  $n$  körberakott pontnak, ami nem tartalmaz szomszédos pontokat? (\*)