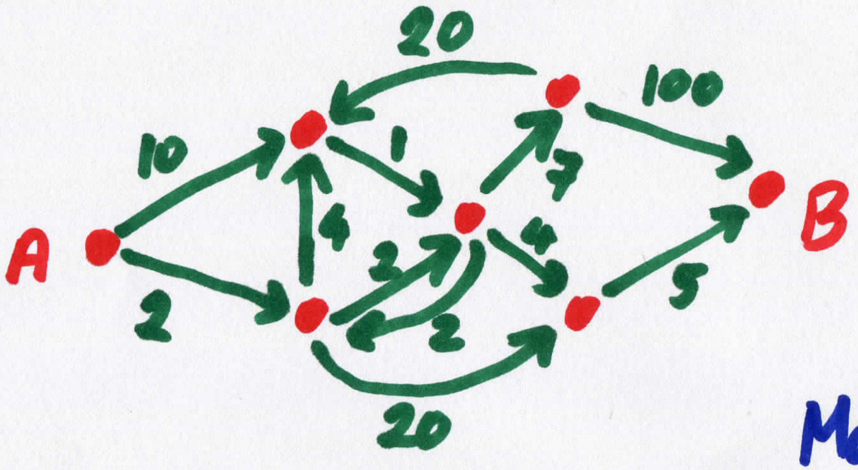
Folyamok, Ford-Fulkerson tétel

Irányított gráf: élek rendezett párok (van eleje és vége)

uv él: 

Példa:



Vasút hálózat, minden vonal egyirányú, adott kapacitással.

Max mennyi árut lehet eljuttatni A-ból B-be, hogyan, hogy lehet megtalálni a megoldást, hogy lehet bizonyítani, hogy nincs jobb?

Hálózat: (G,s,t,c), G: irányított gráf

s: forrás (egy kitüntetett csúcs)

t: nyelő (ez is)

c: $E \to \mathbb{R}_0^+$ kapacitás. (E: élek)

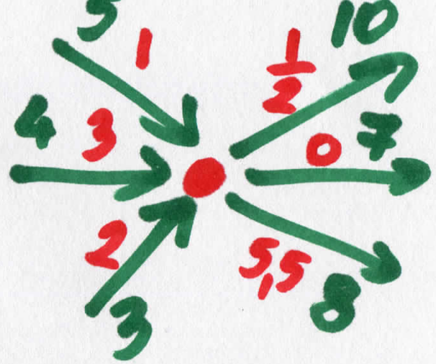
$c(uv)$: uv él kapacitása. $c(uv) \geq 0$

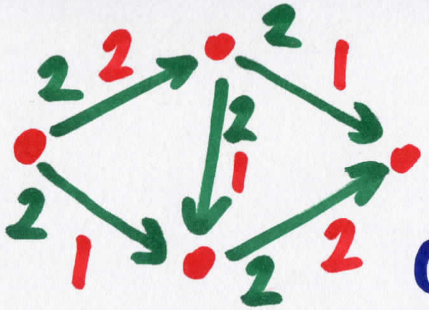
Folyam: $f: E \to \mathbb{R}_0^+$ amelyre:

1. minden e élre $0 \leq f(e) \leq c(e)$
2. minden $v \neq s,t$ csúcsra

$$\underbrace{\sum_v f(uv)}_{u\text{-ki}} = \underbrace{\sum_v f(vu)}_{u\text{-be}}$$

csomóponti (kirchoff) szabály





Megfigyelés:

minden élt ± szal számolunk

$$0=\sum_u\sum_v f(uv)-\sum_u\sum_v f(vu)=\sum_u\left(\sum_v f(uv)-\sum_v f(vu)\right)$$

$$=\left(\sum_v f(sv)-\sum_v f(vs)\right)+\left(\sum_v f(tv)-\sum_v f(vt)\right)+\sum_{u\neq s,t}\underbrace{\left(\sum_v f(uv)-\sum_v f(vu)\right)}_{\text{csomóponti szabály miatt } u\neq s,t\text{-re } 0}$$

s-ki − s-be   t-ki − t-be

$\Longrightarrow$ s-ki − s-be = t-be − t-ki = $m(f)$

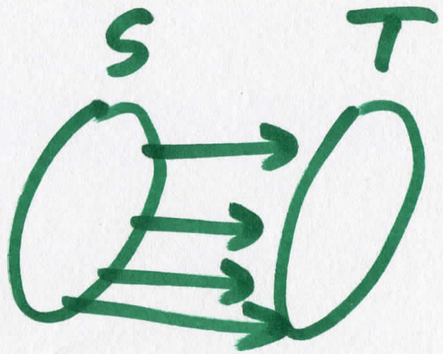
s-ből nettó ki = t-be nettó be f folyam nagysága

Cél: adott (G,s,t,c)-re $m(f)$-et maximalizálni.

Vágás: (S,T), ahol $S \cup T = V(G)$

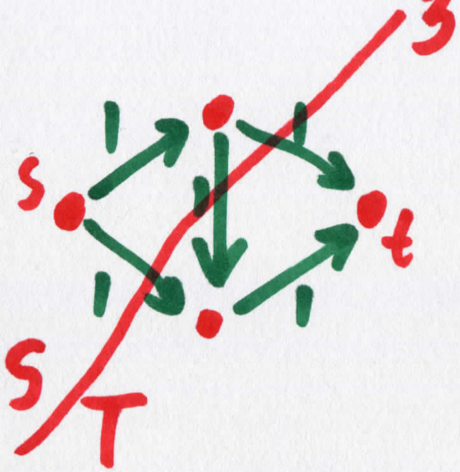
S, T diszjunkt

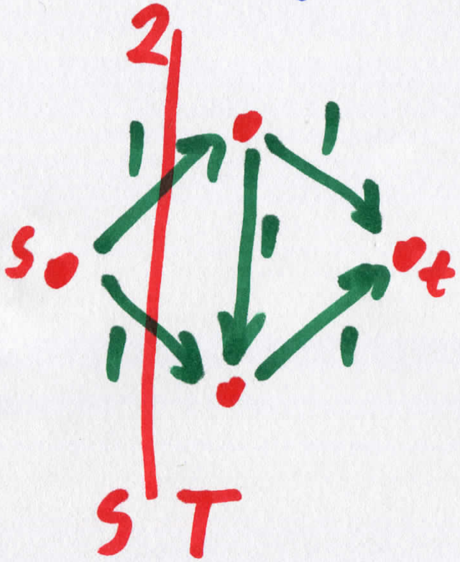
$s \in S$, $t \in T$.

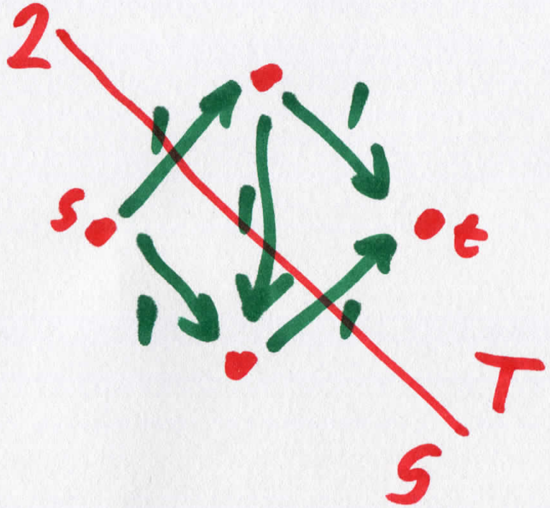


Vágás kapacitása: $$c(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(uv)$$

Visszaéleket nem számoljuk!







Legyen f folyam, S,T vágás. Áll: $m(f) \le c(S,T)$

Biz: $m(f) = \sum_v \big(f(sv) - f(vs)\big) = \sum_{u \in S} \Big(\sum_v \big(f(uv) - f(vu)\big)\Big) =$

s-ki − s-be

u-ki − u-be : 0, kivéve s-re

$= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(uv) - \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(vu) \le \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(uv) - 0 = c(S,T)$

S-en belüli élekre: ±, kiesik.

Tehát: <u>max folyam ≤ min vágás</u>

<u>Ford-Fulkerson</u>: Tetszőleges (G,s,t,c) hálózatban

$$\max(m(f)) = \min(c(S,T))$$

Max folyam = min vágás.

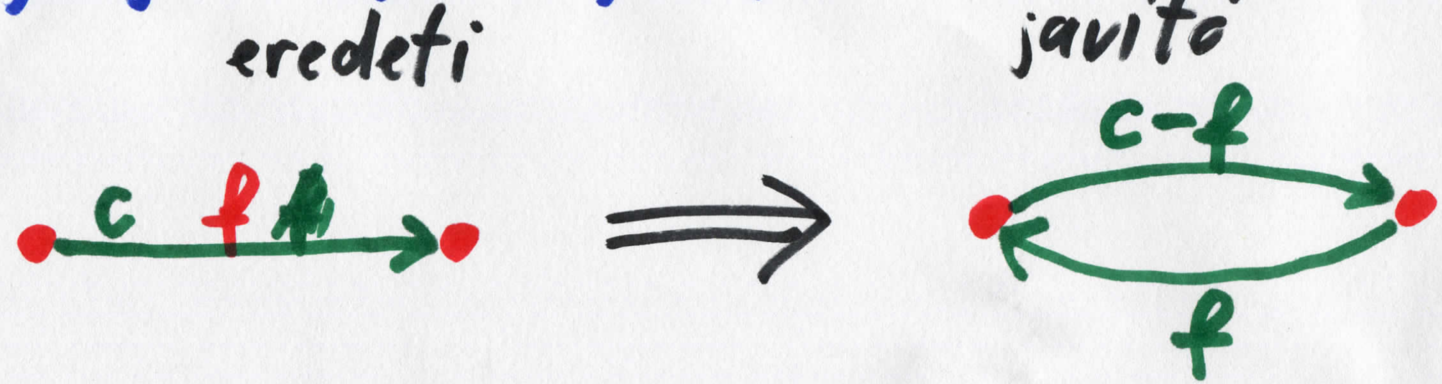
Min. vágás létezik: véges sok vágás van.

Max folyam? Pl konvergenciával. $m(f)$ korlátos,
$m(f_i) \to \sup m(f)$, feltehetjük, hogy minden
éken $f_i(e)$ konvergens. Határérték
$f(e) = \lim f_i(e)$ is folyam, $m(f) = \sup m(f)$

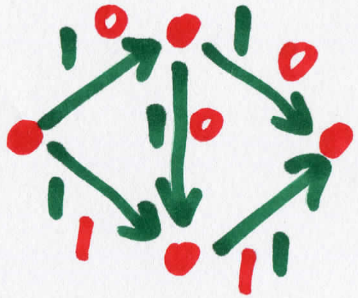
Ford–Fulkerson biz:

Tfh már van egy (nem feltétlenül max) folyam, f.

Segédgráf (javítógráf):

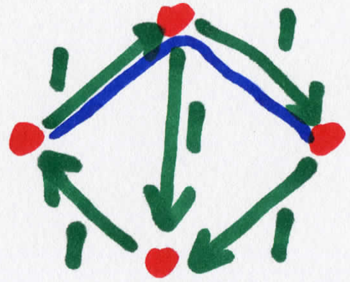


Ha a javító gráfban van s-t út (javító út):
Keressük meg a javító úton levő legkisebb kapacitást.
Ennyivel javíthatunk a folyamon.



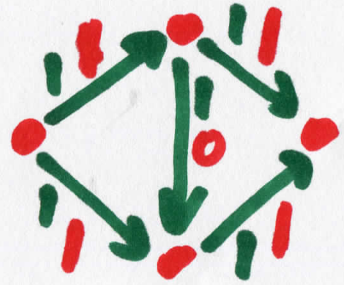
eredeti folyam

m(f)=1



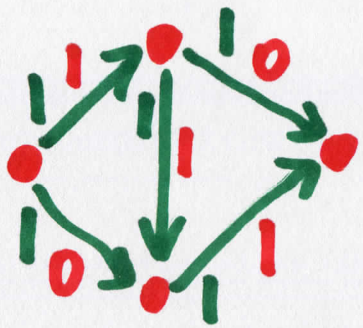
javítógráf

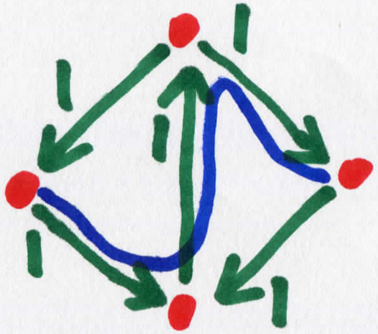
+ javító út

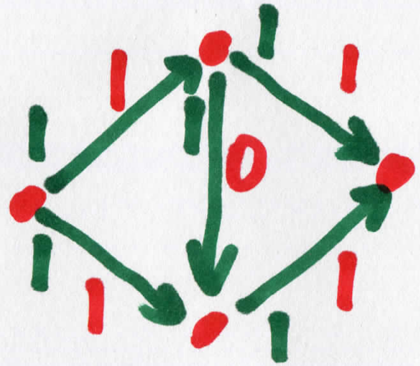


új folyam

m(f)=2





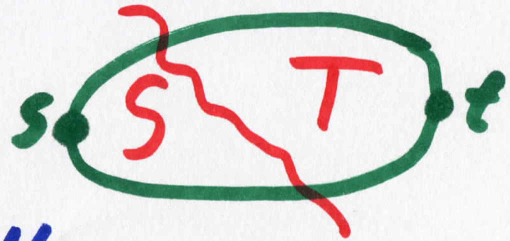


visszaél is szükséges!

<u>Tfh</u> <u>NINCS</u> javító út s-ből t-be.

Legyen $S = \{v$, ami elérhető s-ből a javítógráfban$\}$

$T = V \setminus S$.

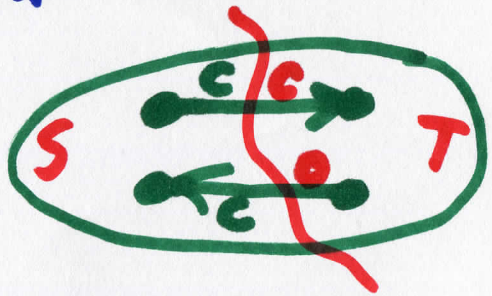


Nyilván $s \in S$, nincs jav út $\Rightarrow t \in T$

Eredeti hálózatban minden $S \to T$ él telített

és minden $T \to S$ él üres:

(különben a jav. gráfban el tudnánk jutni egy T-beli pontba)



$$m(f) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(uv) - \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(vu) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(uv) - 0 = c(S,T) \geq m(f)$$

5. old.　　$S \to T$　　$T \to S$

$\Rightarrow m(f) = c(S,T) \Longrightarrow f$ maximális folyam!

Összefoglalva: f max folyam $\Longleftrightarrow$ javító gráfban nincs jav. út

$\Longleftrightarrow$ van ST vágás: $m(f)=c(S,T)$ ✓

$\Longrightarrow$ S,T minimális vágás KÉSZ

F-F tétel bizonyításából: (hatékony) algoritmus max folyam megtalálására:

csupa 0 folyam → jáv gráf → van jáv út → új folyam → jáv gráf

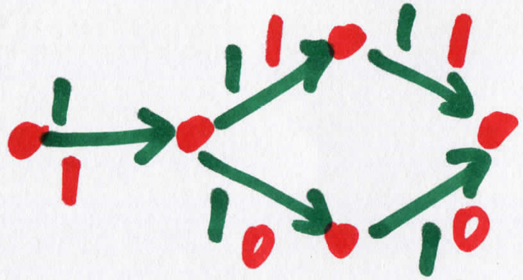
jáv gráf → nincs jav út KÉSZ

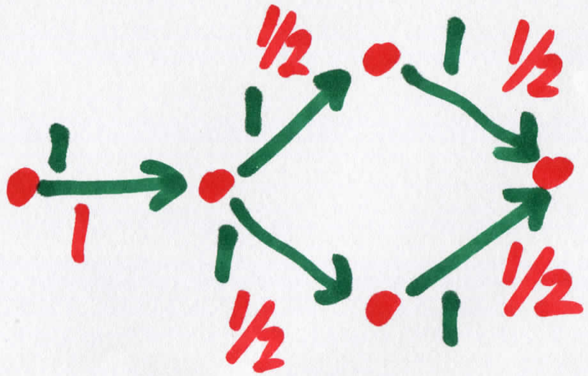
Ha minden kapacitás egész: mindig legalább 1-gyel nő $m(f)$ → jav utas alg. megtalálja a max folyamot.

jav. út keresése: pl szélességi keresés. (utolsó előtti óra)

<u>Egészértékűségi (EGÉR) lemma:</u> Ha minden kapacitás egész, akkor <u>van</u> csupa egész max folyam.

Biz: Javítóutas alg. mindig minden éken egésszel változtatja a folyamot, és megtalálja a max folyamot. ⟶ ezen miden érték egész.





Edmonds-Karp tétel: Ha mindig a legrövidebb javító úton javítunk, (annyit, amennyit lehet) akkor polinom időben megtaláljuk a max folyamot.

↗ input polinomja

Ha akármilyen jav. utat választhatunk:
futásidő lehet sokkal több
SŐT: lehet, hogy sose érünk célba!
SŐT: lehet, hogy $m(f_i)$ nem is konvergál max $m(f)$-hez!