Dirac, Ore, Pósa és Chvátal Hamilton-körökről szóló tételei

Def.: A G gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* a G olyan köre (útja), mely G minden csúcsát tartalmazza.

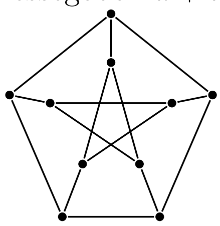
Mivel egy körben (útban) szereplő minden csúcs különböző, ezért a Hamilton-kör (Hamilton-út) a G gráf olyan bejárása, mely G minden csúcsát *pontosan* egyszer érinti.

Állítás: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k+1$) komponense van.

Biz.: Ha a G gráf maga egy Hamilton-kör (Hamilton-út), akkor az állítás világos. Ha G-nek további élei is vannak, akkor a pontok törlése után keletkező komponensek száma csak csökkenhet.

A fenti feltétel szükséges, ám nem elégséges. A Petersen-gráfnak nincs Hamilton-köre, noha teljesíti a feltételt. Ha volna Hamilton-köre, akkor 3 színnel színezhetnénk az éleit úgy, hogy az azonos színű élek páronként diszjunktak legyenek. (A Hamilton-kör 10 élére kell 2 szín, a kimaradó élek pedig diszjunktak, mivel a Petersen-gráf 3-reguláris.) Márpedig a külső ötszög és a hozzá csatlakozó élek 3-színezése (a szimmetria miatt) lényegében egyértelmű, és ez nem terjeszthető ki globális 3-színezéssé.

Ha a Petersen-gráf külső köréből a, belső köréből pedig b csúcsot hagyunk el, akkor a külső ill. belső körön keletkező komponensek száma legfeljebb a ill. b, vagyis a gráfnak nem keletkezhet összességében $a+b$-nél több komponense.



Vannak azonban jól használható, elégséges feltételek is Hamilton-kör létezésére.

Tétel: [Dirac tétele] Ha az n pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Tétel: [Ore tétele] Ha az n pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u) + d(v) \geq n$ (azaz összekötetlen csúcsok fokszámösszege legalább n), akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

Ha egy gráfra teljesül a Dirac feltétel, akkor teljesül rá az Ore is. Ezért a Dirac tétel következik az Ore tételből.

Tétel: [Pósa tétele:] Ha az n pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf fokszámai $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$, és minden $k < \frac{n}{2}$ esetén $d_k \geq k+1$, akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

Lemma: Ha egy gráfra teljesül az Ore feltétel, akkor teljesül rá a Pósa is. Ezért az Ore tétel következik a Pósa tételből.

Biz.: (A Lemma bizonyítása) Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy teljesül az Ore feltétel, de a Pósa feltétel nem. Legyen $d_k \leq k$ valamely $1 \leq k < \frac{n}{2}$-re, és legyen U a k legkisebb fokú pont halmaza. Bármely U-beli pont fokszáma legfeljebb k, így bármely két U-beli pont fokszámösszege kisebb, mint n, ezért az Ore feltétel miatt U teljes gráfot feszít. Minden U-beli pontból tehát $k-1$ él indul U-beli ponthoz, ezért legfeljebb 1 él indulhat U-n kívülre. $k < \frac{n}{2}$ miatt létezik tehát $V(G) \setminus U$-nak olyan v pontja, mely U egyetlen pontjával sincs összekötve. Ekkor tetszőleges $u \in U$ csúcsra u és v fokszámösszege legfeljebb $k + (n-k-1) = n-1$, ami ellentmond az Ore feltételnek.

Tétel: [Chvátal tétele] Legyen G n pontú ($n \geq 3$), egyszerű gráf, melynek fokszámai $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. Tegyük fel, hogy minden $k < \frac{n}{2}$-re, $d_k \geq k+1$ vagy $d_{n-k} \geq n-k$ teljesül. Ekkor G-nek létezik Hamilton-köre.

Másrészt, ha egy $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ sorozatra nem teljesül az előző feltétel, akkor van olyan G' gráf, aminek nincs Hamilton-köre, és fokszámainak $d'_1 \leq d'_2 \leq \ldots \leq d'_n$ sorozatára $d_i \leq d'_i$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$ áll fenn.

Könnyen látható, hogy ha egy gráfra teljesül a Pósa feltétel, akkor teljesül rá a Chvátal is. Ezért a Pósa tétel következik az Chvátal tételből.

A tételek igazolásához rendkívül hasznos az alábbi segédtételel.

Lemma: Legyen G egy n csúcsú gráf, u és v két nem szomszédos csúcsa, amelyekre $d(u) + d(v) \geq n$. Ekkor a G gráfban van Hamilton kör akkor és csak akkor, ha $G' = G + uv$-ben van.

Biz.: Nyilván ha G-ben van Hamilton kör akkor $G' = G+uv$-ben van. Tegyük fel, hogy G'-ben van egy H Hamilton kör, de G-ben nincs. Ekkor H tartalmazza az uv élet, hiszen G és G' ebben az egy élben különböznek. Tehát $P = H \setminus uv$ egy Hamilton út G-ben, u és v végpontokkal. Legyenek P csúcsai $u = v_1, v_2, \ldots v_n = v$. Ha $v_1 v_k$ éle G-nek, akkor $v_{k-1} v_n$ nem lehet G éle, mert különben $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_n, v_{n-1}, \ldots, v_k, v_1$ egy Hamilton kör lenne G-ben. Tehát v_i szomszédait megelőző csúcsok nem lehetnek v_n szomszédai. Ezenkívül v_n saját magának sem szomszédja, tehát $d(v_i)+1$ csúcs nem lehet v_n szomszédja. Ebből következik, hogy $d(v_1) + d(v_n) \leq n - 1$, ami ellentmondás.

Def.: Legyen G egy n csúcsú gráf. Ha találunk két nem szomszédos u, v csúcsot, amelyekre $d(u)+d(v) \geq n$, akkor húzzuk be az uv élet. Ismételjük az eljárast amíg el nem akadunk. A kapott $cl(G)$ gráfot nevezzük G lezártjának.

Előfordulhat, hogy a definícióban szereplő él hozzáadás nem egyértelmű, vagyis egy lépésben több lehetséges él közül is választhatunk. Ennek ellenére belátható, hogy G lezártja egyértelmű. A $cl(G)$ gráfban igaz, hogy ha $d(u) + d(v) \geq n$, akkor u és v szomszédosak.

A Lemmából azonnal következik a Dirac illetve az Ore tétel. Ha bármely két nem szomszédos pont fokszámösszege legalább n, akkor G lezártja, $cl(G)$ az n pontú teljes gráf, amelyben nyilván van Hamilton kör, tehát a Lemma alapján G-ben is van. Most bebizonyítjuk Pósa tételét.

Biz.: (Pósa tétel bizonyítása) Legyen G egy gráf, amely teljesíti a Pósa feltételt. Belátjuk, hogy a lezártja $cl(G)$ a teljes gráf. Legyenek a csúcsok $v_1, \ldots, v_n$, fokszámaik $cl(G)$-ben $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Nyilván $cl(G)$ is teljesíti a Pósa feltételt. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy n páros. Ekkor $d_{n/2-1} \geq n/2$, tehát minden $i \geq n/2 - 1$ esetén $d_i \geq n/2$. Viszont ekkor a $v_{n/2-1}, v_{n/2}, \ldots, v_n$ teljes gráfot alkotnak. Ez $n/2 + 2$ csúcs, tehát minden $i \geq n/2 - 1$ esetén $d_i \geq n/2 + 1$. Viszont $d_{n/2-2} \geq n/2 - 1$, ezért $v_{n/2-2}$ is össze van kötve $v_{n/2-1}, v_{n/2}, \ldots, v_n$ mindegyikével. De ekkor $i \geq n/2-2$ esetén $d_i \geq n/2+2$. Ugyanígy belátható, hogy $v_{n/2-3}$ is össze van kötve $v_{n/2-2}, v_{n/2-1}, \ldots, v_n$ mindegyikével, és így tovább. Végül azt kapjuk, hogy $cl(G)$ az n csúcsú teljes gráf, akkor viszont nyilván van Hamilton köre, de akkor a Lemma alapján G-nek is van.

Most pedig belátjuk a Chvátal tételt.

Biz.: (Chvátal tétel bizonyítása) Legyen G egy gráf, amely teljesíti a Chvátal feltételt. Belátjuk, hogy a lezártja $cl(G)$ a teljes gráf. Legyenek a csúcsok $v_1, \ldots, v_n$, fokszámaik $cl(G)$-ben $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$. Nyilván $cl(G)$ is teljesíti a Chvátal feltételt. Belátjuk, hogy a Pósa feltételt is teljesíti. Tegyük fel az egyszerűség kedvéért, hogy n páros. Tehát minden $i < n/2$-re vagy (1) vagy (2) teljesül. Ha minden $i < n/2$-re teljesül (1), akkor teljesül a Pósa feltétel, ezért a Pósa tétel alapján $cl(G)$ tartalmaz Hamilton kört. Ha van olyan i amelyre csak (2) teljesül, (1) nem, akkor legyen k a legkisebb ilyen szám. Tehát $d_{k-1} \geq k$, de $d_k \leq k$, ezért $d_k = k$. Ugyanakkor (2) alapján $d_{n-k} \geq n - k$, tehát $d_{n-k}, d_{n-k+1}, \ldots, d_n \geq n - k$. Ekkor viszont v_k össze van kötve a $v_{n-k}, v_{n-k+1}, \ldots, v_n$ csúcsokkal, ami $k+1$ csúcs, ami ellentmond annak, hogy $d_k = k$. Tehát $cl(G)$ teljesíti a Pósa feltételt, ezért a Pósa tétel alapján $cl(G)$ tartalmaz Hamilton kört, akkor viszont a Lemma alapján G is.

A tétel második részéhez, ha csak a fokszámsorozat alapján kell megmondani, van-e biztosan Hamilton-kör a gráfban, akkor nem állíthatunk erősebbet a Chvátal tételnél. Tetszőleges n természetes számra és tetszőleges $k < \frac{n}{2}$-re létezik ugyanis olyan n pontú, egyszerű gráf, melynek nincs Hamilton-köre, de k db k-adfokú, $(n - 2k)$ db $(n - k - 1)$-edfokú és k db $(n - 1)$-edfokú pontja van. (Az innen adódó fokszámsorozat csak k-ra sérti meg a Chvátal feltételt. Bármely fokszám megnövelésével pedig teljesül a Chvátal feltétel.) Legyenek ugyanis az A, B, C ponthalmazok rendre k, k ill. $n - 2k$ pontúak, húzzuk be C-n belül az összes élt, továbbá kössük össze B minden pontját az összes többi ponttal. A fokszámok a fentiek lesznek, de B elhagyásával $k + 1$ komponens keletkezik, nem található tehát a gráfban Hamilton-kör.