Kombinatorikus geometria házi feladatok

1. Tekintsünk 6 pontot a térben általános helyzetben, és minden párt kössünk össze szakaszokkal. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan háromszög, amelyek össze vannak fűzve (vagy fonódva), vagyis nem húzhatók szét, csak ha elvágjuk őket.

2. Bizonyítsuk be, hogy az Alon-Seymour-Thomas szeparátor tétel nem érvényes, ha lehetnek negatíiv súlyok is. Pontosabban: nem létezik c konstans a következő tulajdonsággal:

   Legyen G egy n csúcsú, súlyozott síikgráf, a csúcsok összsúlya 1. Ekkor a csúcshalmaz felosztható A, B, C részekre úgy, hogy

   (a.) $1/3 \le w(A), w(B)$ (b.) $|C| \le c\sqrt{n}$ (c.) nincs AB él.

   Illetve:

   (a'.) $2/3 \ge w(A), w(B)$ (b.) $|C| \le c\sqrt{n}$ (c.) nincs AB él.

3. Bizonyítsuk be, hogy $cr(K_{n,n})/\binom{n}{2}^2$, mint n függvénye, monoton növekedő.

4. Az előadáson bebizonyítottuk a Lipton-Rose-Tarjan tételt, miszerint, ha egy tartalmazásra zárt $\mathcal{G}$ gráfosztályban van $O(n/\log^{1+\varepsilon})$-os szeparátortétel egy fix pozitív ε-ra, akkor van olyan – a gráfosztálytól függő – $c = c(\mathcal{G})$ konstans, hogy bármely $\mathcal{G}$-beli n-pontú gráfnak legfeljebb cn éle van. (Ld. a Lipton, Rose és Tarjan cikkét a honlapunkon.)

   (a) Mutassuk meg, hogy a számolás nem működik, ha $\varepsilon = 0$!

   (b)* Egyáltalán igaz az állítás $\varepsilon = 0$ esetén? Ha ellenpéldát találsz, akkor azért piros pont jár + csokoládé. Ráadásul ugye akkor a feladat (a) részét nem kell külön megoldani.

5. Az előadáson szokatlan bizonyítást adtunk az Ajtai-Chvátal-Newborn-Szemerédi, Leighton úgynevezett Metszési Lemmára, miszerint minden n-pontú, $e > 4n$ élű G gráf metszési (keresztezési) számára igaz, hogy $cr(G) > ce^3/n^2$, ahol c egy pozitív konstans. A bizonyítást csak arra az esetre részleteztük, amikor G reguláris, vagyis bármely pontjának ugyanaz a foka. A bizonyítás az elvágási vastagság ($b(G)$) és a metszési szám ($cr(G)$) közötti összefüggésen alapult. Pontosabban többször alkalmaztuk a következő lemmát:

   Lemma. *Legyen G egy tetszőleges n-pontú gráf, melyben a pontok fokai d_1, d_2, …, d_n. Minden s-re ($1 < s \le n$) elhagyható G-ből legfeljebb*

   $$8.6\left(\frac{n}{s}\right)^{1/2}\left(16cr(G) + \sum_{i+1} d_i^2\right)^{1/2}$$

   él úgy, hogy a maradékban minden összefüggő komponensnek legfeljebb s pontja legyen.

   FELADAT: Terjesszük ki a bizonyítást az általános esetre, vagyis amikor G nem feltétlenül reguláris! (Segítség: Ha minden pont foka legfeljebb $10e/n$, akkor a kiterjesztés szinte triviális. Ha vannak ennél nagyobb fokú pontok, akkor azokat vágjuk szét kisebb fokúakra, melyek az eredeti ponthoz nagyon közel vannak, de a belőlük kifutó élek egy kis környezetben nem metszik egymást!)

6. Bizonyítsuk be, hogy a sík szakaszai közötti *diszjunktság* reláció nem összehasonlítás–gráf.

7. Legfeljebb hány éle lehet egy n csúcsú topologiai gráfnak (csúcsok: pontok, élek: görbék) amelyben bármely két élnek legfeljebb 2 közös pontja van, és nincs két diszjunkt él?
8. Legyen $g(n)$ egy n elemű ponthalmaz egyenessel levágható, $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű részhalmazainak maximális száma. Az Erdős–Lovász–Simmons–Straus, vagy az Edelsbrunner–Welzl–féle rekurzió felhasználásával mutassuk meg, hogy valamilyen $c > 0$ konstansra és minden $n \geq 2$-re $g(n) > cn \log n$.
9. Valamilyen fix $c > 0$ konstansra, és minden $n > 100$-ra mutassunk olyan n csúcsú, $cn^{4/3}$ élű geometriai gráfot, amely rendelkezik a csillag tulajdonsággal.
10. Legyenek egy hipergráf csúcsai pontok a térben, az élek pedig olyan részhalmazok, amlelyek egy féltérrel levághatóak a ponthalmazról. Adjunk (minél jobb) felső korlátot ennek a hipergráfnak a VC–dimenziójára.
11. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan f függvény, amelyre teljesül, hogy minden H hipergráfra
$$\tau(H) \leq f(\tau^*(H)).$$
12. A Haussler–Welzl tétel bizonyításában szerepelt a következő lépés.
$$P(X \text{ nem fogja le} H \text{ összes élét}) =$$
$$P(\exists E \in E(H) \mid I(E, X) = 0) \leq$$
$$\frac{P(\exists E \in E(H) \mid I(E, X) = 0 \text{ és } I(E, Y) \geq m_E)}{\min_{E \in E(H)} P(I(E, Y) \geq m_E)}.$$
Bizonyítsuk be, hogy ez a lépés jogos, vagyis valóban fennáll az egyenlőtlenség.

13. Legyen G egy *konvex geometriai gráf*, vagyis egy gráf, lerajzolva a síkra úgy, hogy a csúcsok konvex helyzetben vannak, az élek pedig egyenes szakaszok. Tegyük fel, hogy nincs két diszjunkt él. Bizonyítsuk be, hogy G-ben legfeljebb egy kör van.
14. Legyen P egy ponthalmaz a síkon, Z pedig zárt, önmagukat nem metsző görbék halmaza, azzal a tulajdonsággal, hogy bármelyik két Z-beli görbe legfeljebb két pontban metszi egymást.

    Definiáljunk egy H hipergráfot, amelynek csúcshalmaza $V(H) = P$, hiperélei pedig P azon E részhalmazai, amelyekhez van olyan Z-beli görbe, hogy E pontjai a görbén belül vannak, $P \setminus E$ pontjai pedig a görbén kívül. Van-e olyan P-től és Z-től független D konstans, amellyel a H hipergráf VC-dimenziója felülről becsülhető?
15. Adjunk meg hat egyenesből álló L halmazt a síkon, és egy $L' \subset L$ részhalmazukat úgy, hogy nincs olyan s szakasz, amely az L'-beli egyeneseket metszi, a többit nem.
16. Bizonyítsuk be, hogy a Welzl-tételben a korlát nem javítható $\sqrt{n}/100$-ra. Pontosabban: konstruáljunk minden n-re olyan n elemű P_n ponthalmazt a síkon, hogy P_n minden T feszítőfájára $\sigma(T) > \sqrt{n}/100$.
17. Legyen P n pont halmaza a térben, általános helyzetben (nincs négy egy síkon). Vegyunk $10n^2$ darab, P pontjai által meghatározott nyílt háromszöget.

    a. Bizonyítsuk be, hogy van két háromszög, amelyek metszik egymást.

    b. Bizonyítsuk be, hogy van két *csúcsdiszjunkt* háromszög, amelyek metszik egymást.