Bevezetés a számításelméletbe II.

8. gyakorlat, 2014. április 1.

Többszörös összefüggőség, Menger tételek, számelmélet

Tudnivalók

Diszjunkt utak: A $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (irányított) s-ből t-be vezető utak pont/éldiszjunktak, ha s-től és p-től különböző pontjaik/éleik diszjunktak.

Menger tétel: A G (irányított) gráfban az s-ből t-be vezető éldiszjunkt utak maximális száma megegyezik az összes st utat lefogó élek minimális számával.
Ha a G (irányított) gráfban s és t nem szomszédosak, akkor az s-ből t-be vezető pontdiszjunkt utak maximális száma megegyezik az összes st utat lefogó, s-től és t-től különböző pontok minimális számával.

Többszörös összefüggőség: A G gráf *k-szorosan élösszefüggő*, ha tetszőleges, legfeljebb $k-1$ élét elhagyva G összefüggő marad. A G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő*, ha legalább $k+1$ pontja van, és tetszőleges, legfeljebb $k-1$ csúcsát elhagyva G összefüggő marad.

Tétel: G k-élösszefüggő $\iff$ G bármely két csúcsa közt fut k éldiszjunkt út. G k-összefüggő $\iff$ G bármely két csúcsa közt fut k pontdiszjunkt út és G legalább $(k+1)$-pontú.

Tétel: Ha G legalább 3-pontú, akkor G 2-összefüggő $\iff$ G bármely 2 pontja egy körön van. (Ha G öf, akkor ez azzal is ekvivalens, hogy G bármely két éle egy körön van.)

Dirac tétel: Ha $k \geq 2$ és G k-összefüggő, akkor G bármely k pontja egy körön van.

Ha $a, b, k \in Z$ és $b = k \cdot a$, akkor a *osztója* b-nek (b *többszöröse* a-nak), jelölése $a \mid b$.

A $p \in Z$, $|p| > 1$ szám *felbonthatatlan*, ha csak $1 \cdot p, p \cdot 1, (-1) \cdot (-p)$ és $(-p) \cdot (-1)$ alakban áll elő egészek szorzataként. (Azaz, ha $a \mid p$ és $1 < |a|$, akkor $|a| = |p|$.) A $z \in Z$ *összetett*, ha $|z| > 1$ és z nem felbonthatatlan. A $p \in Z$, $|p| > 1$ szám *prím*, ha $p \mid ab, \quad a, b \in N \Rightarrow p \mid a$ vagy $p \mid b$. (Egészek szorzatát csak úgy oszthatja, ha vmik tényezőt osztja.)

Állítás: Tetszőleges 1-nél nagyobb egész szám előáll felbonthatatlan számok szorzataként.

Tétel: A p szám pontosan akkor felbonthatatlan, ha prím.

Következmény: (A számelmélet alaptétele) Tetszőleges n egész (melyre $2 \leq |n|$) a tényezők sorrendjétől és esetleges (-1) tényezőktől eltekintve egyértelműen áll elő felbonthatatlan számok szorzataként.

Az n *kanonikus alakja* $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, ahol a p_i-k prímek, és $1 \leq \alpha_i \in N$ $\forall i$.

Állítás: Egy $d > 0$ egész pontosan akkor osztója n-nek, ha d kanonikus alakjában csak n prímosztói szerepelnek, legfeljebb az n kan. alakjában szereplő kitevőn. ($n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i} \Rightarrow d = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$, $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.)

Következmény: Ha $1 < n$ kanonikus alakja $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, akkor n poz. osztóinak száma $d(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$ill. az n pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \sum_{j=0}^{\alpha_i} p_i^j = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{1+\alpha_i} - 1}{p_i - 1}$.

Az a és b egészek *legnagyobb közös osztója* $(a, b) := \max\{d : d \mid a, d \mid b\}$, *legkisebb közös többszörösük* pedig $[a, b] := \min\{0 < d : a \mid d, b \mid d\}$. Az a és b egészek *relatív prímek*, ha $(a, b) = 1$.

Állítás: Ha $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ és $b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$ ($\alpha_i = 0$ és $\beta_i = 0$ is lehet), akkor $(a, b) = p_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\min(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}$, $[a, b] = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdot p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$, valamint $ab = (a, b) \cdot [a, b]$. Továbbá, ha $d \mid a$ és $d \mid b$ az a és b közös osztója, akkor $d \mid (a, b)$.

Állítás: Ha a, b egészek, akkor $(a, b) = (a - b, b) = (a - kb, b)$ tetszőleges egész k esetén.

Euklideszi algoritmus Input: $a, b \in Z$. Output: (a, b).
Tfh $a \geq b$. Legyen $a_0 := a, a_1 := b$ és $a_0 = a_1 h_1 + a_2$, ahol $0 \leq a_2 < a_1$ (maradékos osztás). Általában $a_{i-1} = a_i h_i + a_{i+1}$, ahol $0 \leq a_{i+1} < a_i$. Ha $a_{k+1} = 0$, akkor $(a_0, a_1) = (a_1, a_2) = (a_2, a_3) = \ldots = (a_k, 0) = a_k$ a keresett lnko.

Következmény: Ha $a, b \in Z$ (nem mind nullák), akkor létezik $k, l \in Z$, melyre $(a, b) = ka + lb$.

Tétel: Végtelen sok prímszám van. Bármely $n \in N$-re létezik n egymást követő összetett szám.

Sejtés: Végtelen sok ikerprím van. (olyan (p, p') prím-pár, amelyre $p' - p = 2$).

Tétel: Végtelen sok olyan (p, p') prím-pár van, amelyre $|p' - p| < 600$).

Csebisev tétel: Minden $0 < n \in N$-re létezik p prím, melyre $n \leq p \leq 2n$.

Dirichlet tétel: Ha $(a, d) = 1$, akkor az $a, a + d, a + 2d, \ldots$ számtani sorban végtelen sok prím van.

Euler tétel: $\displaystyle\sum_{p \text{ prím}} \frac{1}{p} = \infty$.

Feladatok

1. Adott a D irányított gráf valamint D élein a c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw folyam.

2. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

3. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?

4. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan pontösszefüggő?

5. Bizonyítsuk be, hogy egy k-szorosan összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!

6. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-szorosan összefüggő!

7. Igazoljuk, hogy tetszőleges r-reguláris $(r > 1)$ egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő is!

8. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?

9. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.

11. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_1)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_1)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)

12. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?

13. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?

14. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?

15. Tegyük fel, hogy G 3-összefüggő, vegyünk fel egy új x pontot, amit G három különböző pontjával összekötünk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 3-összefüggő marad!

16. Igazoljuk, hogy ha a 2012-pontú G gráf 11-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 183-élű út. (Segítség: Menger!)

17. Mik azok a p prímszámok, amelyekre
    (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím? (b) $p^2 + 2$ is prím? (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?

18. Igazoljuk, hogy bármely hat egymást követő egész szám szorzata osztható 720-szal.

19. Mutassuk meg, hogy ha egy $n > 1$ egész esetén $2^n - 1$ prím, akkor n prím.

20. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész egyértelműen írható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol k és l pozitív egészek, továbbá l egyetlen négyzetszám osztója az 1.

21. Tudjuk, hogy ha az 10794 és 14890 számokat elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?

22. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amire $3 \nmid n$ és n pozitív osztóinak száma $d(n) = 12$?

23. Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fönn minden pozitív egészekbol álló szám k-asra, ha $k = 2$. (ZH '02)

24. Legyen n olyan páratlan egész szám, amelyik egyetlen prím négyzetével sem osztható. Bizonyítsuk be, hogy n pozitív osztóinak átlaga egész. (ZH '03)

25. Igazoljuk, hogy tetszőleges a és b egészekre $(a, b) = (a - b, b)$ teljesül.

26. A Fibonacci sorozat elemei $F_1 = 0, F_2 = 1$ és $i \geq 2$-re $F_i = F_{i-1} + F_{i-2}$. Bizonyítsuk be, hogy $i \geq 1$ esetén F_i és F_{i+1} relatív prímek. Határozzuk meg az F_i és F_{i+2} legnagyobb közös osztóját is!

27. Határozzuk meg az $n! + k$ és az $(n + 1)! + k$ számok legnagyobb közös osztóját.

28. Igazoljuk, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semilyen pozitív egész n-re sem egyszerűsíthető.

29. Bizonyítsuk be, hogy a $n = \Pi_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$ szám pozitív osztóinak összege $\sigma(n) = \Pi_{i=1}^{n} \frac{p_i^{\alpha_i+1-1}}{p_i-1}$.