Bevezetés a számításelméletbe II.

7. gyakorlat, 2014. március 25.

Folyamok, többszörös összefüggőség, Menger tételek

Tudnivalók

A *hálózat* egy (G, s, t, c) négyes, ahol $G = (V, E)$ egy irányított gráf, $c : E \to R_+$ kapacitásfüggvény és $s, t \in V$ a G különböző csúcsai (s a *termelő*, t a *fogyasztó*). A fenti hálózaton $f : E \to R_+$ egy *folyam*, ha $0 \le f(e) \le c(e)$ minden $e \in E$ élre (ez a *kapacitásfeltétel*), és $\sum_{uv \in E} f(uv) = \sum_{vu \in E} f(vu)$ tetszőleges $v \in V \setminus \{s, t\}$ csúcsra (ez a *folyammegmaradási* avagy *Kirchoff-feltétel*). Az f folyam *nagysága* (vagy *értéke*) az s-ből kifolyó nettó folyammennyiség: $\sum_{su \in E} f(su) - \sum_{us \in E} f(us)$.

A fenti hálózatban ha $X \subset V$ olyan halmaz, hogy $s \in X \not\ni t$, akkor a hálózat X által meghatározott *(st-)vágása* az X és $V \setminus X$ között futó élek halmaza, beletartoznak a $V \setminus X$-ből X-be futó élek is. Az X által definiált F vágás kapacitása $c(F) := \sum_{u \in X, v \in V \setminus X} c(uv)$, azaz az X-ből $V \setminus X$-be futó élek összkapacitása.

Lemma: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f egy folyam és $s \in X \subseteq V \setminus \{t\}$ egy st-vágást meghatározó ponthalmaz, akkor $m_f = \sum_{v \in X, u \in V \setminus X} f(vu) - f(uv)$

Következmény: Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f egy folyam és F egy st-vágás, akkor $m_f \le c(F)$.

Állítás: A (G, s, t, c) egy hálózat f folyama pontosan akkor maximális (azaz az m_f folyamnagyság akkor legnagyobb), ha $m_f = c(F)$ valamely F st-vágásra.

Ford-Fulkerson tétel: Tetszőleges hálózatban a maximális folyamnagyság megegyezik a minimális vágáskapacitással.

Ha (G, s, t, c) egy hálózat, f pedig egy folyam, akkor a $G_f = (V(G), E_f)$ az f-hez tartozó *segédgráf*, melyre $uv \in E_f$ ha $uv \in E(G)$ és $f(uv) < c(uv)$ (*előreél*) vagy ha $vu \in E(G)$ és $f(vu) > 0$ (*visszaél*). Az f folyamhoz egy *javító út* a G_f segédgráf egy s-ből t-be vezető irányított útja.

Ha egy f folyamhoz tartozó G_f segédgráfban pontosan akkor létezik javító út, ha f nem maximális nagyságú. A javító út mentén az előreéleken ε-nal növelve (maximum a kapacitásig), a visszaéleken ε-nal csökkentve (legfeljebb 0-ig) a folyamot, a folyam nagysága ε-nal növelhető.

Javító utas algoritmus Kiindulunk a $f \equiv 0$ folyamból, és addig növelünk az aktuális f-hez tartozó segédgráf javító utja mentén, amíg ez lehetséges. Ha nincs további javítás, akkor a folyam maximális.

Edmonds-Karp tétel: Ha a javító utas algoritmusban mindig egy lehető legkevesebb élből álló javító út mentén javítunk, akkor legfeljebb nm javítás kell a maximális folyam megtalálásához, ahol n a hálózat csúcsainak, m pedig az éleinek száma.

Egészértékűségi (EgÉr) lemma: Ha a c kapacitásfüggvény egész, akkor létezik maximális nagyságú egészfolyam, azaz olyan f maxfolyam, amire $f(e)$ egész minden e élen.

Diszjunkt utak: A $P_1, P_2, \ldots, P_k$ (irányított) s-ből t-be vezető utak pont/éldiszjunktak, ha s-től és p-től különböző pontjaik/éleik diszjunktak.

Menger tétel: A G (irányított) gráfban az s-ből t-be vezető éldiszjunkt utak maximális száma megegyezik az összes st utat lefogó élek minimális számával.
Ha a G (irányított) gráfban s és t nem szomszédosak, akkor az s-ből t-be vezető pontdiszjunkt utak maximális száma megegyezik az összes st utat lefogó, s-től és t-től különböző pontok minimális számával.

Többszörös összefüggőség: A G gráf *k-szorosan élösszefüggő*, ha tetszőleges, legfeljebb $k-1$ élét elhagyva G összefüggő marad. A G gráf *k-szorosan (pont)összefüggő*, ha legalább $k+1$ pontja van, és tetszőleges, legfeljebb $k-1$ csúcsát elhagyva G összefüggő marad.

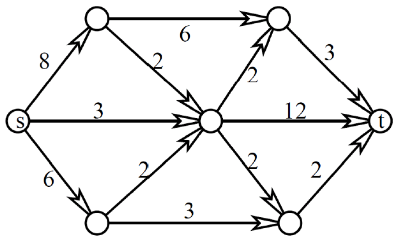
Tétel: G k-élösszefüggő $\iff$ G bármely két csúcsa közt fut k éldiszjunkt út. G k-összefüggő $\iff$ G bármely két csúcsa közt fut k pontdiszjunkt út és G legalább $(k+1)$-pontú.

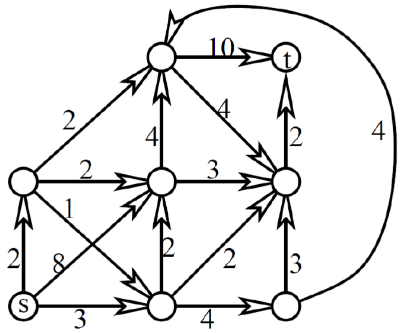
Tétel: Ha G legalább 3-pontú, akkor G 2-összefüggő $\iff$ G bármely 2 pontja egy körön van. (Ha G öf, akkor ez azzal is ekvivalens, hogy G bármely két éle egy körön van.)

Dirac tétel: Ha $k \ge 2$ és G k-összefüggő, akkor G bármely k pontja egy körön van.

Feladatok

1. Adjunk meg egy-egy maximális folyamot az alábbi hálózatokban, és bizonyítsuk be, hogy nagyobb folyam nem lehetséges.





2. a) Az előző feladat hálózataiban válasszuk valamelyik él kapacitását a feltüntetett helyett c-nek, és határozzuk meg, hogyan függ a maximális folyamnagyság a c kapacitás értékétől.
   b) Szintén az előző feladat hálózatait tekintve döntsük el, melyik élt kellene a gráfban törölni ahhoz, hogy a létrejövő hálózatban a maximális folyam nagysága a lehető legkisebb legyen.

3. Tegyük fel, hogy a (D, s, t, c) hálózatban az s-t tartalmazó, t-től diszjunkt X és az Y ponthalmazok mindegyike minimális kapacitású st-vágást határoz meg. Mutassuk meg, hogy az $X \cap Y$ és $X \cup Y$ ponthalmazokhoz is minimális kapacitású st-vágás tartozik.

4. Igaz-e, hogy minden hálózatban van olyan e él, amelynek a kapacitását ε-nal csökkentve (ahol $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$) a maximális folyamnagyság is ε-nal csökken?
   Igaz-e az, hogy minden hálózatban van olyan e él amihez létezik egy pozitív ε mennyiség úgy, hogy ha e kapacitását ε-nal növeljük (ahol $0 \leq \varepsilon \leq c(e)$), akkor a maximális folyamnagyság is ε-nal növekszik?
   Ha a fenti állítások valamelyike nem igaz, akkor hogyan lehet eldönteni egy adott hálózatban, hogy létezik-e olyan él, ami rendelkezik a kérdésben leírt tulajdonsággal?

5. Adott a D irányított gráf valamint D élein a c kapacitásfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy ha s, t és w a D olyan csúcsai, hogy létezik D-ben m nagyságú st-folyam és m nagyságú tw folyam is, akkor D-ben létezik m nagyságú sw folyam.

6. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális folyam nagysága legalább 15.

7. Irányítsuk a kocka élhálózatának éleit az s csúcsból az átellenes t csúcs felé. Hogyan kell a kiosztani a 12 él közt 4 db 1-es, 2-es ill. 3-as kapacitást, hogy a kapott hálózatban a maximális folyamnagyság a lehető legnagyobb legyen?

8. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?

9. Melyik az a legnagyobb k szám, amelyre a $K_{n,n}$ teljes páros gráf k-szorosan pontösszefüggő?

10. Bizonyítsuk be, hogy egy k-szorosan összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!

11. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-szorosan összefüggő!

12. Igazoljuk, hogy tetszőleges r-reguláris $(r > 1)$ egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő is!

13. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?

14. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy G háromszorosan pontösszefüggő, de négyszeresen már nem.

15. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.

16. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1+G_2) \geq \lambda(G_1)+\lambda(G_1)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1+G_2) \geq \kappa(G_1)+\kappa(G_1)$ is teljesül? (G_1+G_2 azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)

17. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G=(V,E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V=A\cup B\cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?

18. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.

19. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?

20. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, vagy 7?

21. Tegyük fel, hogy G 3-összefüggő, vegyünk fel egy új x pontot, amit G három különböző pontjával összekötünk. Bizonyítsuk be, hogy a kapott gráf 3-összefüggő marad!

22. Igazoljuk, hogy ha a 2012-pontú G gráf 11-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 183-élű út. (Segítség: Menger!)