Bevezetés a számításelméletbe II.

5. gyakorlat, 2014. március 11.

Kőnig, Hall, Frobenius, Tutte tételek

Tudnivalók

$\alpha(G)$: független pontok maximális száma; $\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma;
$\nu(G)$: független élek maximális száma; $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma.
$\chi(G)$: kromatikus szám; $\omega(G)$: klikkszám.

Kőnig tétel: (a) Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.
(b) Ha G páros és nincs izolált pontja, akkor $\alpha(G) = \rho(G)$.

Gallai tétel: (a) Ha G–ben nincs hurokél (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\tau(G) + \alpha(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma. (b) Ha G–ben nincs izolált pont (de nem feltétlenül páros gráf) akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$ ahol n G csúcsainak a száma.

Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

Frobenius tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Hall Tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$.

Tutte tétel: A G véges gráfban pontosan akkor létezik teljes párosítás, tetszőleges X csúcshalmazra $G - X$-nek legfeljebb $|X|$ páratlan komponense van: $c_p(G - X) \leq |X|$ $\forall X \subseteq V$ esetén.

	max fuggetlen		min lefogo	Konig, ps graf	
pont	α	+	τ	$=n$	Gallai nincs hurokel
el	ν	+	ρ	$=n$	Gallai nincs iz pont
				Konig ps graf, nincs iz pont	

Feladatok

1. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.

3. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?

4. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.

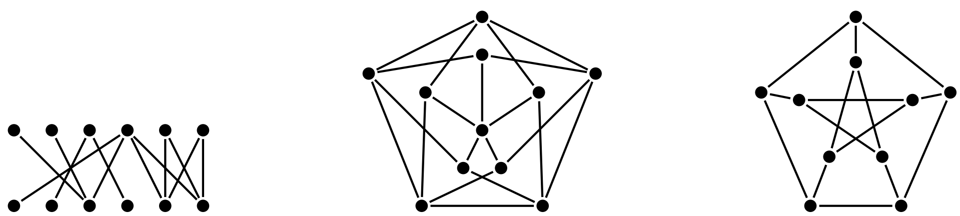
5. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)

6. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.

8. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

9. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



10. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.

11. Konstruáljunk olyan gráfot, amelynek pontosan k db különböző teljes párosítása van.

12. Igaz-e, hogy tetszőleges véges G gráf mindazon élei, amik G valamelyik teljes párosításában szerepelnek, páros gráfot alkotnak?

13. Adott egy $n \times n$ -es mátrix, amelynek minden sorában, és oszlopában pontosan k darab egyes van. Bizonyítsd be, hogy ekkor kiválasztható n darab egyes úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy darab egyest választottunk ki!

14. Legyen $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{2004}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ hárommal osztva 1 maradékot ad. Határozzuk meg az alábbi gráfokra $\alpha(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$ és $\tau(G)$ értékeit.

15. Legyen $V(H) = \{v_1, v_2, \ldots v_{74}\}$. A v_i és v_j $(i \neq j)$ csúcsok között akkor menjen él, ha $i + j$ és 74 relatív prímek. Határozzuk meg az $\alpha(H)$, $\nu(H)$, $\rho(H)$, $\tau(H)$ értékét!

16. Legyen G egy $2n$ pontú gráf, mely egy $2n - 1$ pontú L útból és egy c pontból áll, ami L minden pontjával össze van kötve. Mennyi $\tau(G)$?

17. Lássuk be, hogy egy n pontú egyszerű G gráfban $\tau(G) = n - 1$ akkor és csak akkor, ha $G = K_n$.