Bevezetés a számításelméletbe II.

4. gyakorlat, 2014. március 4.

Intervallum gráfok színezése, élkromatikus szám, páros gráfok, párosítás, Kőnig, Hall, Frobenius tételek

Tudnivalók

Az G gráf $L(G)$ *élgráfjának* csúcsai a G élei, melyek pontosan akkor vannak összekötve, ha a megfelelő élek csatlakoznak. Az élszínezési számot $\chi'(G)$ jelöli. Az élszínezési szám az élgráf kromatikus száma. Ha G véges gráf akkor $\Delta(G) \le \chi'(G)$.

Vizing tétel: Ha G egyszerű és véges, akkor $\chi'(G) \le \Delta(G) + 1$.

A G gráf *intervallumgráf*, a G csúcsai megfeleltethetők valós intervallumoknak úgy, hogy két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő intervallumok metszik egymást. Ha G intervallumgráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$.

A G gráf *páros gráf*, ha csúcsai 2-színezhetőek, azaz G csúcsai úgy sorolhatóak két színosztályba, hogy azonos osztályon belül nem fut G-nek éle.

A G gráf pontosan akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan kört, más szóval, ha minden köre páros hosszúságú. (Tehát pl minden fa páros gráf.) A $G(V, E)$ gráfban éleinek F részhalmaza *párosítás* (más szóval *független*), ha F élei diszjunktak, azaz G bármely csúcsa legfeljebb egy élnek végpontja. (És F-ben hurokélek sincsenek.) Az F párosítás *teljes*, ha V minden pontját *fedi*, azaz V minden pontjából indul F-nek éle. A G-beli független élek maximális számát $\nu(G) := \{|F| : F \text{ a } G \text{ párosítása}\}$ jelöli.

Ha X a $G = (V, E)$ gráf csúcsainak részhalmaza akkor $N(X) := \{v \in V : \exists x \in X : vx \in E\}$ az X halmazbeli pontok szomszédságának uniója.

Frobenius tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek teljes párosítása, ha $|A| = |B|$ és az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \le |N(X)|$ teljesül.

Hall Tétel: Ha A és B a G páros gráf színosztályai, úgy pontosan akkor létezik G-nek A-t fedő párosítása, ha az A színosztály pontjainak tetszőleges X részhalmazára $|X| \le |N(X)|$ teljesül.

A G gráf csúcsainak U részhalmaza *lefogó ponthalmaz*, ha U *lefogja* G minden élét, azaz G minden élének van U-beli végpontja, más szóval $G - U$ üres gráf. A G lefogó ponthalmazai méretének minimumát $\tau(G) := \min\{|U| : U \text{ a } G \text{ lefogó ponthalmaza}\}$ jelöli. Tetszőleges véges gráfra $\tau(G) \ge \nu(G)$.

Kőnig tétel: Ha G véges, páros gráf, akkor $\tau(G) = \nu(G)$.

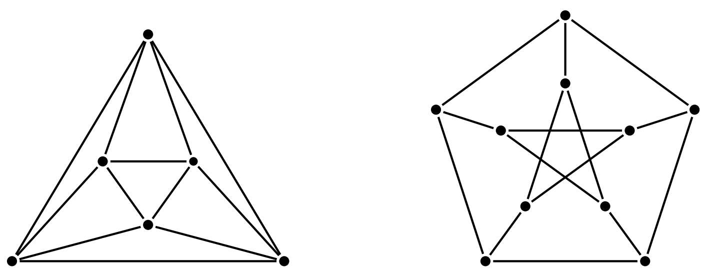
Feladatok

1. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.

2. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.

3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.

4. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



5. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.

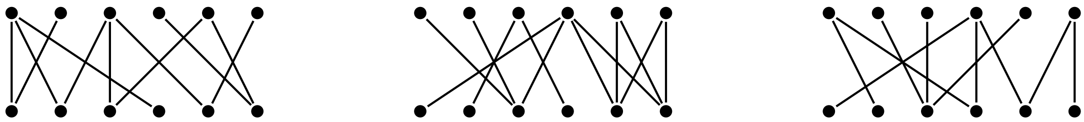
6. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) egyszerű síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.

8. A G gráf csúcsai intervallumoknak felelnek meg egy *körvonalon*. Két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a két intervallum *metszi egymást*. Igaz-e mindig, hogy $\chi(G) = \omega(G)$?

9. A G gráf csúcsai intervallumoknak felelnek meg egy *egyenesen*. Két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a két intervallum *diszjunkt*. Igaz-e mindig, hogy $\chi(G) = \omega(G)$?

10. Határozzuk meg a maximális párosítás méretét az alábbi gráfokban.



11. Adott n fiú és n lány úgy, hogy minden fiúnak legfeljebb 1 rokona van a lányok között, és bármely lányhoz van olyan fiú, aki nem rokona. Bizonyítsuk be, hogy a fiúk és a lányok párokba rendezhetők úgy, hogy rokonok nem alkotnak párt.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha a G páros gráf összefüggő és az A osztályában a fokszámok különbözők, akkor G-nek van A-t fedő párosítása.

13. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, melyek G minden csúcsán áthaladnak?

14. Igazoljuk, hogy minden reguláris páros gráfnak van teljes párosítása.

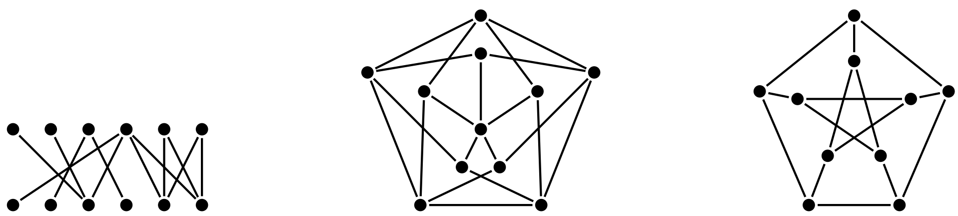
15. Legyen G egy olyan egyszerű gráf, amelynek 1000 csúcsa van és minden csúcs fokszáma legalább 6. Igazoljuk, hogy $\nu(G) \geq 6$. ($\nu(G)$ a független élek maximális számát jelöli.)

16. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.

17. Bizonyítsuk be, hogy minden véges G gráfra $2\nu(G) \geq \tau(G)$ teljesül. Mutassunk olyan gráfot, melyre egyenlőség áll.

18. Egy táncmulatságon 25 lány és 25 fiú van jelen. E társaságban minden lány ismeretségben van legalább 13 fiúval és minden fiú legalább 13 lánnyal. Bizonyítsuk be, hogy páros táncra perdülhetnek egyszerre mind az 50-en úgy, hogy az egymással táncolók ismerik egymást!

19. Határozzuk meg az alábbi gráfokban a $\tau(G), \nu(G), \rho(G)$ és $\alpha(G)$ értékeket!



20. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt, és közöttük kellene elosztani $2n$ különböző csokoládét úgy, hogy mindenki egyet kapjon. Tudjuk, hogy minden résztvevő legalább n fajtát szeret a $2n$-féle csokoládé közül, és az is teljesül, hogy minden csokoládét szereti minden házaspárnak legalább az egyik tagja. Bizonyítsuk be, hogy ekkor kioszthatók úgy a csokoládék, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret.