Bevezetés a számításelméletbe II.

3. gyakorlat, 2014. február 25.

Kromatikus szám, ötszíntétel, intervallum gráfok színezése, élgráfok, élkromatikus szám

Tudnivalók

A G egyszerű gráf csúcsainak egy *színezésén* színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. A G gráf *kromatikus száma*, $\chi(G) = k$ ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

A G gráf *klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G gráf *klikkszáma* a legnagyobb klikkjének mérete, jele $\omega(G)$. Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$ (gyenge Brooks).

Brooks tétel: Ha G összefüggő, de nem klikk és nem is páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Mycielski tétel: Minden pozitív egész k ra létezik olyan G_k gráf, melyre $\omega(G_k) = 2$, és $\chi(G_k) = k$.

Az G gráf $L(G)$ *élgráfjának* csúcsai a G élei, melyek pontosan akkor vannak összekötve, ha a megfelelő élek csatlakoznak. Az élszínezési számot $\chi'(G)$ jelöli. Az élszínezési szám az élgráf kromatikus száma. Ha G véges gráf akkor $\Delta(G) \leq \chi'(G)$.

Vizing tétel: Ha G egyszerű és véges, akkor $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Ötszíntétel: Ha G síkbarajzolható, akkor $\chi(G) \leq 5$.

Négyszíntétel: Ugyanez, 4-gyel.

A G gráf *intervallumgráf*, a G csúcsai megfeleltethetők valós intervallumoknak úgy, hogy két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha a megfelelő intervallumok metszik egymást. Ha G intervallumgráf, akkor $\chi(G) = \omega(G)$.

Feladatok

1. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.

2. Van-e olyan G gráf, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?

3. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$ (ill. $\chi(G) \leq 3$)?

4. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

6. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.

7. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.

8. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.

9. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.

10. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.

11. A Mycielski konstrukcióval megkapott G_k gráfok közül melyek tartalmaznak Euler körsétát, és melyeknek van Hamilton körük?

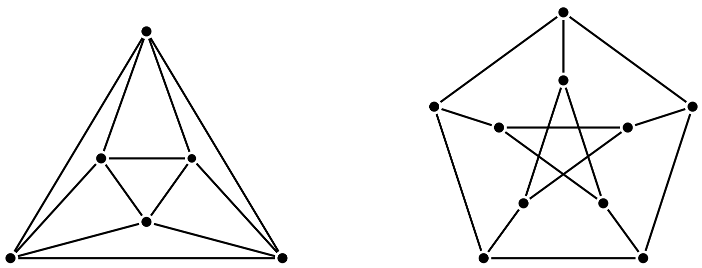
12. Tegyük fel, hogy az egyszerű G gráf r-reguláris, összefüggő, de van olyan pontja (elvágó pont), melyet elhagyva a gráf szétesik. Igazoljuk, hogy $\chi'(G) = r + 1$.

13. Tegyük fel, hogy G egyszerű, 8-reguláris, 2009 pontú gráf. Határozzuk meg a $\chi'(G)$ élkromatikus számot.

14. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\chi'(K_n)$ élkromatikus számát.

15. Legyen $n \geq 2$. Mennyi az n csúcsú teljes gráf élgráfja komplementerének $\chi(\overline{L(K_n)})$ kromatikus száma?
(A G gráfhoz tartozó *élgráf* csúcsai G éleinek felelnek meg, és két $L(G)$-beli csúcs pontosan akkor szomszédos, ha a nekik megfelelő G-beli éleknek van közös végpontjuk.)

16. Mennyi az ábrán látható gráfok élkromatikus száma?



17. Határozzuk meg annak a gráfnak a kromatikus és élkromatikus számát, amit egy $2n$ pontú körből úgy kapunk, hogy behúzzuk az n átmérőt.

18. Legyen G olyan 3-reguláris egyszerű gráf, melyben van elvágó él (azaz olyan él, melyet elhagyva a gráf több komponensre esik). Mutassuk meg, hogy ekkor $\chi'(G) = 4$.

19. Bizonyítsuk be, hogy minden (legalább három csúcsú) egyszerű síkgráfnak van legalább három olyan csúcsa, amelyeknek a foka kevesebb mint hat.

20. A G gráf csúcsai intervallumoknak felelnek meg egy *körvonalon*. Két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a két intervallum metszi egymást. Igaz-e mindig, hogy $\chi(G) = \omega(G)$?

21. A G gráf csúcsai intervallumoknak felelnek meg egy *egyenesen*. Két csúcs össze van kötve akkor és csak akkor, ha a két intervallum *diszjunkt*. Igaz-e mindig, hogy $\chi(G) = \omega(G)$?