Bevezetés a számításelméletbe II.

2. gyakorlat, 2014. február 18.

Hamilton körök és utak, páros gráf, kromatikus szám

Tudnivalók

A G gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* a G olyan köre (útja), mely G minden csúcsát tartalmazza.

Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k+1$) komponense van.

Dirac tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Ore tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u) + d(v) \geq n$, akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

A $G = (V, E)$ gráf *páros*, ha csúcsai $V = A \cup B$ módon két *színosztályra* bonthatók úgy, hogy G minden élének van A-beli és B-beli végpontja is. Jelölés: $G = (A, B; E)$.

A C_n kör pontosan akkor páros gráf, ha n páros.

G gráf páros akkor és csak akkor, ha G nem tartalmaz páratlan kört. Minden fa páros gráf.

A G egyszerű gráf csúcsainak egy *színezésén* színeknek a csúcsokhoz való olyan hozzárendelését értjük, melyben szomszédos csúcsok különböző színt kapnak. A G gráf *kromatikus száma*, $\chi(G) = k$ ha G kiszínezhető k színnel, de $(k-1)$-gyel nem.

A G gráf *Klikkje* a G egy teljes részgráfja. A G gráf *klikkszáma* a legnagyobb klikkjének mérete, jele $\omega(G)$.

Ha G véges, egyszerű, akkor $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Feladatok

1. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.

2. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

3. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!

4. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris részgráfja, mely az eredeti gráf összes pontját tartalmazza?

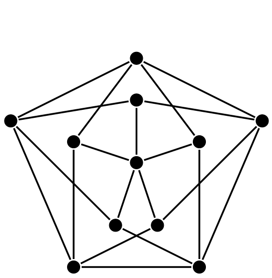
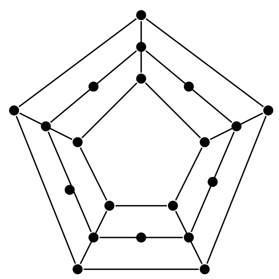
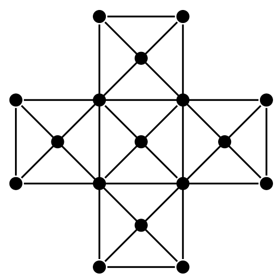
   (Egy gráfot *k-regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k.)

5. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?

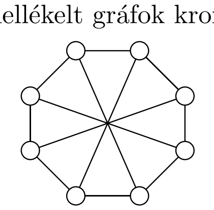
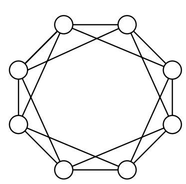
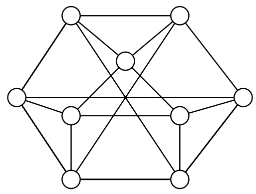
6. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

7. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
   (a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
   (b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;

8. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?

9. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
10. Hány különböző Hamilton-köre van a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfnak? ($n \geq 2$).
11. Legfeljebb hány éle lehet egy hat csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?
12. Határozzuk meg a mellékelt gráfok kromatikus számát!

13. Legyenek G csúcsai az $1, 2, \ldots, 2^n - 1$ számok, és két csúcs pontosan akkor legyen szomszédos, ha egyik osztója a másiknak. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
14. Legyen $V(G) = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, és legyen $ij \in E(G)$, ha $|i - j| \leq 7$. Mennyi az így meghatározott G gráf $\chi(G)$ kromatikus száma?
15. Legyenek a G gráf csúcsai a sakktábla mezői. Két mező közt akkor fusson él, ha a huszár (bástya, futó, király) egy lépésben az egyik mezőről a másikra léphet. Mennyi a G gráf kromatikus száma?
16. Adott a síkon általános helyzetű egyeneseknek egy halmaza (azaz semelyik három egyenes sem halad át egy ponton és nincs köztük két párhuzamos). Legyenek a G gráf csúcsai ezen egyenesek metszéspontjai, két csúcs akkor legyen szomszédos, ha egy egyenesen egymást követő metszéspontok. Mutassuk meg, hogy $\chi(G) \leq 3$.
17. Van-e olyan G gráf, aminek nincs K_4 részgráfja, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?
18. Legfeljebb hány éle lehet annak az n csúcsú G gráfnak, amire $\chi(G) \leq 2$ (ill. $\chi(G) \leq 3$)?
19. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G gráf $\chi(G)$ színnel történő tetszőleges színezésének bármely színosztályának van olyan v csúcsa, hogy v-nek minden más színosztályban van szomszédja.
20. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G gráfra $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.
21. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.
22. Legyenek $G_1 = (V, E_1), G_2 = (V, E_2)$ tetszőleges véges gráfok és legyen $G = (V, E_1 \cup E_2)$ gráfok. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) \leq \chi(G_1)\chi(G_2)$.
23. Tekintsük a sík egyeneseinek egy véges halmazát. Mutassuk meg, hogy a keletkező síktartományok sakktáblaszerűen kiszínezhetőek.
24. Tegyük fel, hogy az atlantiszi országok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy az összes országhatárt be lehet járni úgy, hogy minden országhatáron egyszer haladunk végig, és a kiindulási pontba érkezünk vissza. Bizonyítsuk be, hogy Atlantisz térképén az országok két színnel színezhetők úgy, hogy szomszédos országok színe különböző legyen.
25. Mutassunk olyan térképet, ahol minden ország egy téglalap, és a térkép kiszínezéséhez nem elég 3 szín.