Bevezetés a számításelméletbe II.

1. gyakorlat, 2014. február 11.

Euler és Hamilton körök és utak

Tudnivalók

A $G = (V, E)$ gráf *Euler-útja (Euler-köre)* a G gráf egy olyan (kör)sétája, mely E minden élét pontosan egyszer tartalmazza.

Ha egy véges G gráfnak létezik Euler-köre, akkor G minden csúcsának páros a fokszáma. Ha G-ben létezik Euler-út, akkor G-nek 0 vagy 2 páratlan fokú csúcsa van.

Ha a $G = (V, E)$ gráf véges és összefüggő, akkor

1. G-nek pontosan akkor van Euler-köre, ha G minden csúcsa páros fokú, ill.
2. G-nek pontosan akkor van Euler-útja, ha G-nek 0 vagy 2 ptn fokú csúcsa van.

A G gráf *Hamilton-köre (Hamilton-útja)* a G olyan köre (útja), mely G minden csúcsát tartalmazza.

Ha a véges G gráfban létezik Hamilton-kör (ill. Hamilton-út), akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k (ill. $k + 1$) komponense van.

Dirac tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf minden pontjának foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-nek van Hamilton-köre.

Ore tétele: Ha az n-pontú ($n \geq 3$), egyszerű G gráf olyan, hogy $uv \notin E(G)$ esetén $d(u) + d(v) \geq n$, akkor G-nek létezik Hamilton-köre.

Feladatok

1. Legyenek a G_n gráf pontjai az n hosszú $(0, 1)$ sorozatok. Két pont akkor legyen szomszédos, ha pontosan egy helyen térnek el egymástól (pl. az $n = 4$ esetben $(0, 0, 0, 1)$ és $(0, 1, 0, 1)$ szomszédosak). Van-e a G_n gráfnak Euler-köre? És Hamilton-köre?

2. Mutassuk meg, hogy ha a G gráfnak van Euler-köre, akkor G csúcsainak bármely részhalmazából páros sok él indul a komplementerébe.

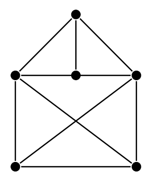
3. Egy egyszerű G gráf csúcsait az $1, 2, \ldots, 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él G-ben, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Euler-kört, illetve Euler-utat?

4. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-köre, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?

5. Mutassuk meg, hogy bármely összefüggő gráf élei bejárhatók úgy, hogy mindegyiken kétszer megyünk végig, éspedig mindkét irányban egyszer-egyszer.

6. A G gráfnak e és f két olyan éle, melyeknek van közös végpontjuk, továbbá G-ben létezik Euler-kör. Következik-e ebből, hogy G-ben olyan Euler-kör is van, melyben e és f egymást követik?

7. Minimálisan hányszor kell felemelni a ceruzánkat, hogy lerajzoljuk az alábbi gráfot úgy, hogy minden élt pontosan egyszer rajzolunk le és másik élre csak a gráf csúcsainál válthatunk?



8. Melyek azok a gráfok amikben pontosan egy Euler-kör van? (Tehát egy él szomszédai az Euler-körön mindig ugyanazok.)

9. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
   (a) Ha G egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.
   (b) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfnak van Euler-köre, akkor G-nek is van.

(c) Ha G-ben van Euler-kör és G valamely körének éleit töröljük, akkor a maradék G' gráfban is van.
(d) Ha G összefüggő és egy körének éleit törölve a maradék G' gráfban van Euler-út, akkor G-ben is van.

10. (a) Bejárható-e a 4×4-es sakktábla egy huszárral úgy, hogy minden mezőt pontosan egyszer érintünk? (A huszár mindig egy 3×2-es téglalap egyik mezőjéről az átellenes mezőre lép.) Mi a válasz (b) valódi sakktábla (8×8-as), (c) 3×5-ös, (d) 3×6-os sakktábla esetén?

11. Mutassuk meg, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk.

12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$-pontú G gráfban van Hamilton-kör, akkor kiválasztható G-nek néhány diszjunkt éle úgy, hogy G minden pontja végpontja valamelyik kiválasztott élnek.

13. Legyen G egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf és tegyük fel, hogy G minden csúcsának legalább n szomszédja van. Bizonyítsuk be, hogy ha G minden élének ki szeretnénk választani legalább egy végpontját, akkor G-nek legalább n csúcsát kell kiválasztanunk.

14. Egy társaságban bármely két embernek legalább két közös ismerőse van. Tudjuk továbbá, hogy bármely két ember vagy ismeri egymást, vagy ha nem, akkor a társaság bármely harmadik tagját legalább az egyikük ismeri. Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy (megfelelő méretű) kerek asztal köré úgy, hogy mindenki két ismerőse között üljön.

15. A G egyszerű gráfnak $2n + 1$ csúcsa van és minden csúcsának legalább n a foka. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van Hamilton-út!

16. Igazoljuk, hogy minden 8-reguláris gráfnak van 4-reguláris és 2-reguláris részgráfja is. Egy 2-reguláris gráfnak van-e mindig olyan 1-reguláris részgráfja, mely az eredeti gráf összes pontját tartalmazza?

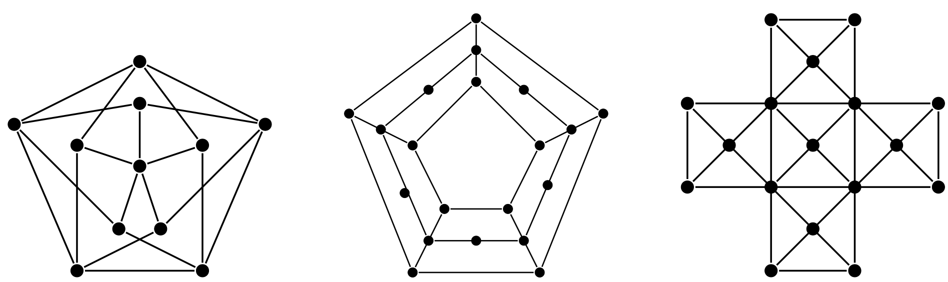
    (Egy gráfot *k-regulárisnak* nevezünk, ha minden csúcsának a fokszáma k.)

17. Egy G egyszerű gráf csúcsait az $1, 2, \ldots 100$ számok jelölik. Az i és j csúcsok között pontosan akkor vezet él, ha $|i - j| \leq 2$. Tartalmaz-e G Hamilton-kört, illetve utat?

18. Igazoljuk, hogy ha a G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

19. Hány különböző Hamilton-köre van a G_n gráfnak, ha
    (a) G_n az n csúcsú K_n teljes gráfot jelöli és $n \geq 3$;
    (b) G_n egy olyan gráf, melyhez K_n egy x, y élének elhagyása révén jutunk és $n \geq 4$;

20. Létezik-e Hamilton-kör, illetve Hamilton-út az alábbi gráfokban?



21. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

22. Hány különböző Hamilton-köre van a $2n$ csúcsú $K_{n,n}$ teljes páros gráfnak? ($n \geq 2$).

23. Legfeljebb hány éle lehet egy hat csúcsú gráfnak, amelyben nincs Hamilton kör?