Polinominvariánsok és reprezentációelmélet

(Az "MTA Doktora" címre benyújtott értekezés tézisei)

Domokos Mátyás

Az MTA Rényi Alfréd
Matematikai Kutatóintézete

2006

1. Bevezetés

1.1. Az invariánselmélet egy reprezentációelméleti alkalmazása

Az invariánselmélet által vizsgált alaphelyzet a következő. Adott egy G csoport egy K test feletti V vektortéren való lineáris hatásával. Tekintsük a G csoport indukált hatását a $K[V]$ koordinátagyűrűn:

$$(g \cdot f)(v) = f(g^{-1}v) \quad (g \in G, f \in K[V], v \in V).$$

A $K[V]$ koordinátagyűrű nem más, mint az n-változós polinomok $K[x_1, \dots, x_n]$ algebrája ($n = \dim(V)$ és $x_1, \dots, x_n$ a V vektortér V^* duálisának bázisa), melyen G a változók lineáris helyettesítései által hat. Az elmélet központi objektuma a *polinominvariánsok*

$$K[V]^G = \{f \in K[V] \mid \forall g \in G : \quad g \cdot f = f\}$$

halmaza. Geometriai megközelítésben a polinominvariánsok a G pályáin állandó polinomfüggvények. Tanulmányozásukat általában az motiválja, hogy a csoporthatás pályáit szeretnénk osztályozni. Például reménykedhetünk abban, hogy megtaláljuk polinominvariánsok egy olyan halmazát, amely a pályákat szétválasztja a következő értelemben: két pont V-ben akkor és csak akkor tartozik különböző pályához, ha a kiválasztott invariánsok valamelyike különböző értéket vesz fel rajtuk. Ez a várakozás meglehetősen naivnak bizonyul ugyan, mégis jelzi a polinominvariánsok alapvető szerepét az algebrai geometria hányadostér (modulustér) konstrukcióiban.

Mivel G algebra automorfizmusok által hat a koordinátagyűrűn, $K[V]^G$ részalgebra $K[V]$-ben. Sőt, végesen generált részalgebra reprezentációknak széles, a természetes alkalmazásokban felbukkanó osztályaira. Ezért konkrét invariánsgyűrűk vizsgálatát hagyományosan két részre osztják: az első cél a $K[V]^G$ algebra egy alkalmas generátorrendszerének (lehetőleg minimális rendszernek) a keresése, majd ezt követi a generátorok közt fennálló relációk leírása. Invariánsok gyűrűinek ilyetén meghatározása bizonyítottan nehéz probléma, és a téma hosszú múltja dacára viszonylag kevés esetben sikerült ezt a programot véghezvinni. Bátran mondhatjuk, hogy bármely olyan új eset, amelyik megközelíthető az invariánselmélet amúgy gazdag eszköztárával vagy viszonyítható valamely jobban megértett példához, érdeklődésre tart számot.

Történeti részletek vagy jelenlegi kutatási irányok ismertetése helyett tekintsünk egy példát, amely nagyban befolyásolta a mi munkánkat, és gyakran hivatkozunk rá az értekezésben. Legyen G a komplex test feletti $GL(n, \mathbb{C})$ általános lineáris csoport, mely szimultán konjugálással hat a komplex $n \times n$-es mátrix m-esek $V = \mathbb{C}^{n\times n} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}^{n\times n}$ terén:

$$g \cdot (A_1, \dots, A_m) = (gA_1g^{-1}, \dots, gA_mg^{-1})$$

ahol $g \in GL(n, \mathbb{C})$ és $A_i \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Jelölje X_i azt a $V \to \mathbb{C}^{n\times n}$ függvényt, amely minden mátrix m-est az i-edik komponensére képez ($i = 1, \dots, m$). A mátrixok polinominvariánsai (a továbbiakban *mátrixinvariánsok*) gyűrűjének generátorait Sibirskiĭ [75] adta meg.

1.1. Tétel. *A mátrixinvariánsok $\mathbb{C}[V]^G$ algebráját generálják a*

$$\mathrm{Tr}(X_{i_1}\cdots X_{i_s}) : (A_1,\ldots,A_m) \mapsto \mathrm{Tr}(A_{i_1}\cdots A_{i_s})$$

nyomok, ahol $s \in \mathbb{N}$, $i_1,\ldots,i_s \in \{1,\ldots,m\}$.

A fenti generátorok közti relációkat Razmyslov [62] és Procesi [61] határozta meg. A kiindulópont az úgynevezett *fundamentális nyomazonosság* az $m = n+1$ esetben. Vegyük az $Y_1,\ldots,Y_{n+1}$ nem felcserélhető változókat, és tetszőleges $\pi \in S_{n+1}$ permutációra, melynek ciklus felbontása

$$\pi = (i_1\cdots i_d)\cdots(j_1\ldots j_e),$$

vezessük be a

$$\mathrm{Tr}^\pi(Y_1,\ldots,Y_{n+1}) = \mathrm{Tr}(Y_{i_d}\cdots Y_{i_1})\cdots\mathrm{Tr}(Y_{j_e}\cdots Y_{j_1})$$

jelölést. Tekintsük a

$$\Phi_{n+1}(Y_1,\ldots,Y_{n+1}) = \sum_{\pi\in S_{n+1}} \mathrm{sign}(\pi)\mathrm{Tr}^\pi(Y_1,\ldots,Y_{n+1})$$

formális kifejezést. A fundamentális nyomazonosság (ld. [36]) azt állítja, hogy

$$\Phi_{n+1}(X_1,\ldots,X_{n+1}) = 0. \tag{1}$$

Világos, hogy tetszőleges $W_i = X_{i_1}\cdots X_{i_t}$ nemkommutatív monomokkal elvégezve az $X_i \mapsto W_i$ $(i = 1,\ldots,m)$ helyettesítést (1)-ben, újabb nyomazonosságokhoz jutunk.

1.2. Tétel. *A $\mathrm{Tr}(X_{i_1}\cdots X_{i_s})$ nyomok közt fennálló relációk mind következnek a fundamentális nyomazonosságból, azaz a relációk ideálját generálják a*

$$\Phi_{n+1}(W_1,\ldots,W_{n+1}) = 0$$

relációk, ahol W_i $(i = 1,\ldots,n+1)$ tetszőleges (nemkommutatív) monomjai az $X_1,\ldots,X_m$ generikus mátrixoknak.

Razmyslov azt is megmutatta, hogy elegendő $s \le n^2$-et venni az 1.1 Tételben, megadva ezáltal egy explicit véges generátorrendszert. A relációkról szóló szép állítás megfogalmazásához azonban még mindig a redundáns végtelen generátorrendszert kell tekinteni. Továbbá a mátrixinvariánsok algebrájának minimális generátorrendszere nagyon kevés speciális esetben ismert.

Térjünk rá a mátrixinvariánsok reprezentációelméleti jelentőségére. Jelölje $F_m = K\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$ az m elem által generált szabad asszociatív K-algebrát. Feltesszük, hogy K algebrailag zárt. Az F_m egy n-dimenziós reprezentációját egy $n\times n$-es mátrix m-es adja meg: az $(A_1,\ldots,A_m) \in K^{n\times n}\oplus\cdots\oplus K^{n\times n}$ mátrix m-eshez az az $F_m \to K^{n\times n}$ reprezentáció (azaz K-algebra homomorfizmus) tartozik, melyre $x_i \mapsto A_i$, $i = 1,\ldots,m$. Ezért a $K^{n\times n}\oplus\cdots\oplus K^{n\times n}$ teret az F_m szabad algebra *n-dimenziós reprezentációi terének* hívjuk, és a továbbiakban a $\mathrm{Rep}(F_m, n)$ szimbólummal jelöljük. Ezen hat a $G = GL(n, K)$ általános lineáris csoport a szimultán konjugálás által. Világos, hogy két $\mathrm{Rep}(F_m, n)$-beli ponthoz tartozó F_m-reprezentáció akkor és csak akkor izomorf, ha a két pont ugyanahhoz a G-pályához tartozik. Így az F_m algebra n-dimenziós reprezentációinak izomorfiaosztályai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak a G csoporthatás $\mathrm{Rep}(F_m, n)$-beli pályáival. Általánosabban, tetszőleges m elem által generált K-algebra prezentálható mint a szabad algebra $R = F_m/I$ faktorgyűrűje. Azon $\mathrm{Rep}(F_m, n)$-beli pontok, melyekhez tartozó F_m-reprezentáció átvezet R-en, egy Zariski-zárt $\mathrm{Rep}(R, n)$ részhalmazt alkotnak, melyet az *n-dimenziós R-modulusok varietásának* neveznek. A reprezentációelmélet alapvető célja R-modulusok izomorfiaosztályainak osztályozása, amit ilymódon lefordítottunk a $\mathrm{Rep}(F_m, n)$-beli G-pályák osztályozásának problémájára. Ez utóbbi approximációját szolgáltatják a polinominvariánsok a következőképpen. Definiáljuk a $\mathrm{Rep}(F_m, n)//G$ affin algebrai varietást, mint a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^G$ algebra spektrumát, és a

$$\sigma : \mathrm{Rep}(F_m, n) \to \mathrm{Rep}(F_m, n)//G$$

affin varietások közti morfizmust, mint a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^G \to K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]|$ algebra beágyazás komorfizmusát. Szokás a σ-t *algebrai hányados leképezésnek* nevezni. Elemibb megfogalmazásban:

legyenek $f_1, \dots, f_d$ generátorai a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^G$ invariáns algebrának, és tekintsük azt az $f : \mathrm{Rep}(F_m, n) \to K^d$ leképezést, melynek koordináta függvényei az f_i polinomok. Kiderül, hogy f képhalmaza zárt a K^d affin tér Zariski-féle topológiájában. Az f képhalmazával azonosítható $\mathrm{Rep}(F_m, n)//G$, az f leképezéssel pedig σ. Az algebrai hányados leképezés rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- σ állandó a G pályáin;
- σ kategorikus hányados leképezés, azaz affin algebrai varietások tetszőleges G-pályákon állandó $\mathrm{Rep}(F_m, n) \to Y$ morfizmusa átvezethető σ-n;
- σ szürjektív, és minden fibruma egyetlen Zariski-zárt pályát tartalmaz;
- Egy pont G-pályája $\mathrm{Rep}(F_m, n)$-ben akkor és csak akkor Zariski-zárt, ha a megfelelő F_m-reprezentáció féligegyszerű.
- Két $\mathrm{Rep}(F_m, n)$-beli pont akor és csak akkor tartozik σ egyazon fibrumához, ha a hozzájuk tartozó reprezentációknak megegyeznek a Jordan-Hölder kompozíciófaktorai.

(Az első három általános tulajdonsága reduktív csoportok algebrai hányados leképezéseinek, ld. pl. [58]. Az utolsó kettő M. Artin [3] észrevétele.) Tehát a $\mathrm{Rep}(F_m, n)//G$ varietás az F_m algebra n-dimenziós féligegyszerű reprezentációit paraméterezi. Ennyit ízelítőül arról, hogyan kap az invariánselmélet szerepet algebrák reprezentációinak osztályozásában.

1.2. Az értekezés tartalma

Az értekezés a szerző invariánselméleti kutatásaira alapul, különös tekintettel az asszociatív algebrák reprezentációelmélete által motivált problémákra. A [31], [16], [15], [20], [22], [24], [30] dolgozataink teljes matematikai tartalmáról beszámolunk. Emellett érintőlegesen megemlítjük a [26], [21], [18], [17], [23], [25], [27], [19], [28], [29] dolgozatok egyes eredményeit.

A dolgozat három nagyobb részből áll, az első véges csoportok polinominvariánsaival foglalkozik. A 2.1 Fejezet a multiszimmetrikus függvények algebrájáról szól, a [31] preprintet követve. Ezt a tárgyalásmódot a nyomazonosságok elmélete motiválta (azaz az 1.2 Tétel), és egyszerre adódtak belőle a multiszimmetrikus függvények algebrájának generátorai és relációik. Amellett, hogy meghökkentően rövid és egyszerű bizonyításokat kaptunk ismert eredményekre, lényegesen új eredmények is kijöttek belőle, például egy explicit véges prezentációja a multiszimmetrikus függvények algebrájának. A multiszimmetrikus függvények és a mátrixinvariánsok közt teremtett kapcsolat fő haszna az a következmény, hogy az m-változós kommutatív polinomgyűrű n-dimenziós féligegyszerű reprezentációinak a sémája redukált.

A multiszimmetikus függvények algebrájáról író számos matematikus között található E. Noether [59], aki ezen keresztül bizonyította alapvető eredményét, miszerint (a komplex számtest felett dolgozva) egy tetszőleges véges csoport polinominvariánsainak algebráját generálják azok az invariánsok, melyek foka nem haladja meg a csoport elemszámát. Ez a fokszám-korlát éles ciklikus csoportokra. A 2.2 Fejezet ennek az eredménynek Hegedűs Pállal közös [16] cikkünkben elért javítását tartalmazza. Megmutatjuk, hogy amennyiben a G véges csoport nem ciklikus, akkor a polinominvariánsai algebráját generálják azon invariánsok, melyek foka legfeljebb $\frac{3}{4}|G|$. Egy ilyen típusú becslésben a $\frac{3}{4}$-es konstans a lehető legjobb.

A második részben tegezreprezentációk invariánselméletére térünk, és egyebek közt messzemenő általánosításait adjuk az 1.1 és 1.2 Tételeknek. A *tegezreprezentációk* fogalmát Gabriel [37] vezette be. Alapvető jelentőségre tett szert a reprezentációelméletben, mivel számos probléma egységesen megfogalmazható ezen a nyelven (maga a *tegez* nem más, mint egy véges irányított gráf). Tegezreprezentációk polinominvariánsai algebrájának generátorrendszerét Le Bruyn és Procesi [56] adta meg (ez az 1.1 Tétel tegezekre vonatkozó általánosítása). A 3.1 Fejezetben az 1.2 Tételt általánosítjuk tetszőleges tegezre, és meghatározzuk a generáló invariánsok közti relációkat a [15] dolgozatunkat követve, ahol a szimmetrikus csoport és egy féligegyszerű kommutatív algebra koszorúszorzatának reprezentációelméletét alkalmaztuk erre a célra.

A véges dimenziós asszociatív algebrák reprezentációelméletében az irányított kört nem tartalmazó tegezek kiemelten fontosak. Ebben az esetben nincsenek nem-konstans polinominvariánsok, így a keletkező algebrai hányadosterek triviálisak. Mégis konstruálhatók érdekes, a reprezentációkat valamilyen ekvivalencia erejéig paraméterező hányadosterek (modulusterek) Mumford geometriai invariánselmélete alapján. Ezek a *projektív hányadostér* konstrukciók az úgynevezett *szemi-invariáns* polinomfüggvényeket használják (ld. [51]). A 3.2 Fejezetben bemutatjuk tegezek szemi-invariánsainak azt a leírását, melyet A. N. Zubkov-val közösen értünk el, és amely tetszőleges karakterisztikában, tetszőleges tegezre érvényes.

A tegezek reprezentációelmélete az öröklődő algebrák reprezentációelméletének felel meg. Ha egyéb végesen generált algebrák reprezentációelméletéről is beszélni akarunk, akkor a megfelelő tegez előírt relációkat kielégítő reprezentációival kell foglalkoznunk. A 3.3 Fejezetben a [22] dolgozatunk alapján erre az általánosabb esetre is kiterjesztjük a szemi-invariánsok generátorrendszerének leírását, és elemezzük a szemi-invariánsok moduluselméleti jelentését.

Az értekezés harmadik részében kimondottan moduláris invariánselméleti kérdésekkel és invariánsok szeparáló rendszereivel foglalkozunk. A mátrixinvariánsok generátorairól szóló 1.1 Tétel karakterisztikamentes változatát Donkin [32] bizonyította. A 4.1 Fejezetben levezetünk ebből egy véges generátorrendszert. Ezután a 2.1 Fejezet egy eredményének alkalmazásaként megmutatjuk, hogy ha az alaptest karakterisztikája pozitív, és nem nagyobb, mint a mátrixok mérete, akkor a $\mathrm{Tr}(X_1 \cdots X_m)$ mátrixinvariáns felbonthatatlan (azaz nem fejezhető ki alacsonyabb fokú mátrixinvariánsok polinomjaként). Hasonló állítást bizonyítunk a karakterisztikus polinom magasabb együtthatóira is. Nulla karakterisztikában Weyl [80] egy alapvető eredménye szerint vektor m-eseken ható csoport polinominvariánsai polarizáció által megkaphatók a legfeljebb dimenziónyi vektorváltozótól függő invariánsokból. Az előbb említett eredmények mutatják, hogy ez a tétel nem érvényes pozitív karakterisztikában, még az úgynevezett klasszikus csoportok természetes reprezentációi esetén sem, sőt, a generátorokra vonatkozó fokszám-korlát m-mel együtt végtelenhez tarthat. Ezért felvetődik a kérdés, hogy van-e Weyl tételének olyan gyengített változata, amely minden karakterisztikában fennáll. Ez a felvetés vezetett a [30] cikkhez, illetve a 4.2 fejezethez. Nevezetesen polinominvariánsok algebráinak generátorrendszerei helyett szeparáló rendszerekkel foglalkozunk. Kiderül, hogy ezzel a gyengítéssel már a polarizáció nagyon egyszerű speciális formája is elegendő ahhoz, hogy korlátozzuk a szükséges vektorváltozók számát a dimenzió függvényében. Az eredményeink újak nulla karakterisztikában is, és az ötlet működik akármilyen kvázi-projektív varietásokon való algebrai csoporthatások esetén, amikor a polarizáció általános fogalmának nincs is értelme.

2. Véges csoportok polinominvariánsai

2.1. Multiszimmetrikus függvények

Az S_n szimmetrikus csoport a koordináták permutációi által hat a $V = K^n$ vektortéren. Jelölje V^m ennek a reprezentációnak az m-szeres direkt összegét. Ekkor a $K[V^m]$ koordinátagyűrű egy mn-változós polinomalgebra, és a *multiszimmetrikus polinomok algebrája* pedig a $K[V^m]^{S_n}$ invariáns gyűrű. (Az $m = 1$ esetben ez a szimmetrikus polinomok jól ismert algebrája.) Egy többszörösen újrafelfedezett régi eremény szerint $\mathrm{char}(K) = 0$ esetén az elemi szimmetrikus polinomok polarizáltjai generálják a multiszimmetrikus polinomok algebráját (ld. [67], [59], [57], [80]). Ugyanez igaz $\mathrm{char}(K) > n$ esetén is (ld. [65], [77]). A generátorok közti relációkat Hilbert tanítványa, Junker [46] [47], [48] tanulmányozta a XIX. században, újabban pedig Dalbec [9], Bukhshtaber és Rees [8] és Vaccarino [78]. A relációk jobb megértéséhez járul hozzá a [31] dolgozatunk.

A mi munkánk első lépése, hogy figyelmet fordítunk a multiszimmetrikus polinomok algebrájában egy új bázisra. Azonosítsuk V^m-et az $n \times n$-es diagonális mátrix m-esek terével. Jelölje

$$x(i) = \mathrm{diag}(x(i)_1, \ldots, x(i)_n), \quad i = 1, \ldots, m$$

a generikus diagonális mátrixokat (azaz $x(i)_j$ jelöli a j-edik koordináta függvényt a V^m i-edik komponensén. Világos, hogy a $K[V^m]^{S_n}$ algebra tartalmazza a $\mathrm{Tr}(w)$ nyomokat, ahol $w = x(1)^{\alpha_1} \cdots x(m)^{\alpha_m}$ tetszőleges monomja a generikus diagonális mátrixoknak (ezek a multiszimmetrikus polinomok éppen a hatványösszegek polarizáltjai). A $K[V^m]$ koordinátagyűrű természetes módon $\mathbb{N}_0^m$-fokszámozott: az $x(i)$ elemeinek multifoka az i-edik standard bázis vektor $\mathbb{N}_0^m$-ben. A $\mathrm{Tr}(w)$ invariáns multifoka (ahol w a fenti alakú) α. Azt mondjuk, hogy $K[V^m]$ egy eleme *multilineáris*, ha multihomogén és a multifoka $(1, \ldots, 1)$.

2.1. Állítás. *Tegyük fel, hogy* $\mathrm{char}(K) > n$ *vagy* $\mathrm{char}(K) = 0$*. Ekkor a generikus diagonális mátrixok legfeljebb* n *monomjának nyomaiból készített* $\mathrm{Tr}(u)\mathrm{Tr}(v)\cdots\mathrm{Tr}(w)$ *szorzatok bázist alkotnak a* $K[V^m]^{S_n}$ *vektortérben.*

Az (1) fundamentális nyomazonosságot diagonális mátrixokra specializálva kapjuk a

$$\Psi_{n+1}(x(1),\dots,x(n+1)) = 0 \tag{2}$$

relációt. Itt

$$\Psi_{n+1}(x(1),\dots,x(n+1)) = \sum_{w_1\cdots w_r = x(1)\cdots x(n+1)} (-1)^r \prod_{j=1}^{r} (\deg(w_j)-1)!\mathrm{Tr}(w_j), \tag{3}$$

ahol az összegzés az $x(1)\cdots x(n+1)$ monom nem-triviális részmonomok szorzatára való bontásaira megy. A (2) következményeire mint a 2.1 Állításban szereplő bázishoz tartozó újraírási szabályokra tekintve villámgyorsan levezethető ($\mathrm{char}(K) > n$ vagy $\mathrm{char}(K) = 0$ feltevés mellett) egyrészt a generátorokra vonatkozó fenti klasszikus állítás, másrészt a multiszimmetrikus függvények algebrájának a 1.2 Tételhez hasonló végtelen prezentációja (a $\mathrm{char}(K) = 0$ esetben ezt más módszerekkel bizonyította Bukhshtaber és Rees [8]). Mi azonban továbbmegyünk, és Derksen [11] egy általános eredményét egy [41]-beli állítás kiterjesztésével kombinálva megadunk egy explicit véges prezentációt. Ennek pontos kimondásához további jelölésekre van szükségünk. Jelölje $\mathcal{M}^{(m)}$ az $x(1),\dots,x(m)$ generikus diagonális mátrixokból képzett (értelemszerűen kommutatív) nem-üres monomok halmazát, és minden $w \in \mathcal{M}^{(m)}$ monomhoz rendeljünk egy t_w kommutatív változót. Tetszőleges d természetes számra legyen

$$\mathcal{F}_d^{(m)} = K[t_w \mid w \in \mathcal{M}^{(m)}, \quad \deg(w) \le d],$$

egy $\binom{m+d}{m}$-változós polinomalgebra. Tekintsük a

$$\varphi_d^{(m)} : \mathcal{F}_d^{(m)} \to K[V^m]^{S_n}, \quad t_w \mapsto \mathrm{Tr}(w)$$

K-algebra homomorfizmust. Mint korábban említettük, ez $d \ge n$, $\mathrm{char}(K) = 0$ vagy $\mathrm{char}(K) > n$ esetén szürjektív. Adott $w_1,\dots,w_{n+1} \in \mathcal{M}^{(m)}$ monomok esetén definiáljuk a

$$\Psi_{n+1} \circ (w_1,\dots,w_{n+1}) \in K[t_w \mid w \in \mathcal{M}^{(m)}]$$

kifejezést a következőképpen: a (3) jobboldalában végezzük el az $x(i) \mapsto w_i$ helyettesítést, majd minden előforduló $\mathrm{Tr}(w)$ helyére írjuk be a t_w változót.

2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy* $\mathrm{char}(K) > n$ *vagy* $\mathrm{char}(K) = 0$*. Ekkor a*

$$\varphi_{n^2-n+2}^{(m)} : \mathcal{F}_{n^2-n+2}^{(m)} \to K[V^m]^{S_n}$$

szürjekció magját, mint ideált generálja

$$S = \{\Psi_{n+1} \circ (w_1,\dots,w_{n+1}) \mid w_i \in \mathcal{M}^{(m)}, \quad \deg(w_1\cdots w_{n+1}) \le n^2-n+2\}.$$

Az alfejezet hátralevő részére feltesszük, hogy $K = \mathbb{C}$, a komplex számok teste. Legyen $\mathrm{Com}(m,n)$ az a részhalmaza $\mathrm{Rep}(F_m,n)$-nek, amely azon mátrix m-esekből áll, melyek komponensei páronként felcserélhetők. Ezt az affin algebrai sokaságot a *kommutáló varietásnak* nevezik. Ezt a részvarietást a $GL(n,\mathbb{C})$ hatása megőrzi, és a

$$\mathrm{Com}(m,n)//GL(n,\mathbb{C}) \subset \mathrm{Rep}(F_m,n)//GL(n,\mathbb{C})$$

algebrai hányadosra gondolhatunk úgy, mint a C_m kommutatív m-változós polinomgyűrű n-dimenziós féligegyszerű reprezentációinak izomorfiaosztályai alkotta varietásra. A diagonális mátrix m-esek V^m tere részsokaság $\mathrm{Com}(m,n)$-ben, és könnyen látható, hogy a koordinátagyűrűk közötti $\mathbb{C}[\mathrm{Com}(m,n)] \to \mathbb{C}[V^m]$ természetes szürjekció megszorítása a megfelelő invariánsgyűrűkre egy

$$\mathbb{C}[\mathrm{Com}(m,n)]^{GL(n,\mathbb{C})} \cong \mathbb{C}[V^m]^{S_n}$$

izomorfizmus (ld. [41]).

Emlékezzünk rá, hogy a $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(F_m, n)]$ koordinátagyűrű egy mn^2-változós polinomalgebra, melyet az $X_1, \ldots, X_m$ generikus $n \times n$-es mátrixok elemei generálnak. Jelölje J azt az ideált a $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(F_m, n)]$ polinomgyűrűben, melyet az $X_iX_j - X_jX_i$ $(1 \leq i < j \leq m)$ kommutátorok elemei generálnak, és jelölje $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)]$ a $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(F_m, n)]/J$ faktorgyűrűt. Ez az algebra nem más, mint a C_m polinomgyűrű *n-dimenziós reprezentációi sémájának a koordinátagyűrűje* (ez tulajdonképpen ennek a sémának a definíciója). A kommutatív algebrának egy közismert régi nyitott kérdése (ld. pl. [45]), hogy ez a séma redukált-e, másszóval hogy a $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)]$ algebra tartalmaz-e nem-nulla nilpotens elemet. Jelölje $\mathrm{rad}(\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)])$ a nilpotens elemek halmazát. Világos, hogy a J ideál közös zéróhalmaza a $\mathrm{Com}(m, n)$ kommutáló varietás, tehát Hilbert nullhelytétele alapján

$$\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)]/\mathrm{rad}(\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)]) \cong \mathbb{C}[\mathrm{Com}(m, n)],$$

és a kérdés úgy is fogalmazható, hogy igaz-e, hogy J a $C_{m,n}$ eltűnési ideálja. A multiszimmetrikus polinomok definiáló relációi és a mátrixinvariánsok között teremtett kapcsolat alkalmazásaként sikerült pozitív választ adnunk a fenti kérdés egy gyengített változatára.

2.3. Tétel. *A $\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)] \to \mathbb{C}[\mathrm{Com}(m, n)]$ természetes szürjekció*

$$\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)]^{GL(n,\mathbb{C})} \to \mathbb{C}[\mathrm{Com}(m, n)]^{GL(n,\mathbb{C})}$$

megszorítása izomorfizmus, azaz $\mathrm{rad}(\mathbb{C}[\mathrm{Rep}(C_m, n)])$ nem tartalmaz nem-nullla $GL(n, \mathbb{C})$-invariánst.

Az állítást úgy is fogalmazhatjuk, hogy az m-változós kommutatív polinom algebra n-dimenziós féligegyszerű reprezentációinak a sémája redukált. Az $m = 2$ esetet más módszerekkel előttünk bizonyította Gan és Ginzburg [38]. Megjegyezzük, hogy [31] idevágó része átfedésben van Vaccarino párhuzamos [79] preprintjével, melyben a szerző a 2.3 Tételt újrabizonyítja, mint a saját eredményei következményét.

Végül térjünk vissza a multiszimmetrikus polinomok algebrájának definiáló relációihoz. A módszerünk tetszőleges karakterisztikában működik a multilineáris invariánsok szintjén, és a következő eredményt adja:

2.4. Tétel. *Tetszőleges K alaptest esetén fennállnak az alábbiak:*

(i) A legfeljebb n monom nyomainak multilineáris $\mathrm{Tr}(u)\mathrm{Tr}(v)\cdots\mathrm{Tr}(w)$ szorzatai bázist alkotnak $K[V^m]^{S_n}$ multilineáris komponensében.

(ii) A monomok nyomai közt fennálló multilineáris relációk mind következményei a (2) relációnak.

2.2. A Noether-féle korlát

A multiszimmetrikus függvények algebrájának generátorait alkalmazva bizonyította E. Noether [59] alapvető tételét, miszerint egy tetszőleges véges csoport polinominvariánsainak $\mathbb{C}[V]^G$ algebráját generálják azon invariánsok, melyek foka nem haladja meg a G csoport elemszámát. Egy adott V komplex test feletti G-modulusra legyen

$$\beta(G, V) = \min\{d \mid \mathbb{C}[V]^G \text{ generálható azon elemeivel, melyek fokszáma } \leq d\},$$

és

$$\beta(G) = \max\{\beta(G, V) \mid V \text{ véges dimenziós } G\text{-modulus}\}.$$

Schmid [69] rámutatott, hogy Weyl egy alapvető tételéből levezethető, hogy $\beta(G) = \beta(G, V_{\mathrm{reg}})$, ahol V_{reg} a G *reguláris reprezentációja*. Következésképpen $\beta(G)$ nem változik, ha a komplex számtestet kicseréljük akármilyen nulla karakterisztikájú alaptestre.

Ezekkel a jelölésekkel Noether tétele azt állítja, hogy $\beta(G) \leq |G|$. Ez a becslés éles, amint azt a ciklikus csoport esete mutatja. Schmid [69] (ld. még [68]) pontosította az eredményt úgy, hogy bebizonyította, hogy amennyiben G nem ciklikus, akkor $\beta(G) \leq |G| - 1$. Schmid munkája nagyon szép redukciós lépéseket tartalmaz, de a végeredményben csak minimális javítást ért el az eredeti tételhez képest. Az értekezés ezen alfejezete ennek az ereménynek arról az élesítéséről szól, melyet Hegedűs Pállal közösen adtunk a [16] cikkben.

2.5. Tétel. *Ha G nem ciklikus, akkor $\beta(G) \leq \frac{3}{4}|G|$.*

A négyelemű Klein-csoport, vagy a nyolcelemű kvaterniócsoport példái mutatják, hogy $c = \frac{3}{4}$ az optimális konstans egy a nem-ciklikus csoportokra vonatkozó $\beta(G) \leq c|G|$ típusú fokszámkorlátban.

Bizonyításunkban használjuk Schmid redukciós lépéseit. A mi hozzájárulásunk döntő része a $\beta(G)$ becslése abban az esetben, amikor G páratlan prím rendű ciklikus csoportok szemi-direkt szorzata.

2.6. Állítás. *Legyenek p, q páratlan prímek, melyekre q osztója a $p-1$ számnak, és jelölje $Z_p \rtimes Z_q$ az (izomorfia erejéig egyértelműen meghatározott) nem-kommutatív szemi-direkt szorzatát a p, illetve q elemű ciklikus csoportoknak. Ekkor fennáll a $\beta(Z_p \rtimes Z_q) \leq \frac{5}{8}pq$ egyenlőtlenség.*

Megjegyezzük, hogy a 2.5 Tételt később Sezer [74] kiterjesztette tetszőleges olyan K alaptest esetére, amelyben $|G|$ invertálható. Knop [53] alkalmazta ezt az eredményt annak bizonyítására, hogy ha ezenfelül $\mathrm{char}(K) \geq \frac{3}{8}|G| + 1$, akkor $\beta_K(G) = \beta_K(G, V_{\mathrm{reg}})$, ahol a $\beta_K(-)$ függvényeket úgy definiáljuk, hogy a $\beta(-)$ definíciójában a $\mathbb{C}$ testet kicseréljük a K testre.

3. Tegezreprezentációk invariánsai

A tegezreprezentációk Gabriel [37] által bevezetett fogalma a lineáris algebra és a reprezentációelmélet osztályozási problémái tág körének biztosít közös keretet. Nagy vonalakban egy tegezreprezentáció lineáris leképezések egy gyűjteménye, és két reprezentáció akkor ekvivalens, ha a reprezentációt hordozó vektorterek bázistranszformációi által alkotott csoportnak ugyanahhoz a pályájához tartoznak. Ilyeténképpen tegezreprezentációk ekvivalencia erejéig való osztályozásának problémája egyenértékű általános lineáris csoportok szorzatának bizonyos lineáris hatásai esetén a pályák osztályozásának kérdésével.

Egy $Q = (Q_0, Q_1, t, h)$ tegez nem más, mint egy véges irányított gráf, amely áll a csúcsok Q_0 halmazából, az élek Q_1 halmazából, valamint a $t, h : Q_1 \to Q_0$ függvényekből, melyek az α élhez hozzárendelik a $t(\alpha)$ kezdőpontját és a $h(\alpha)$ végpontját. A Q tegez egy $\mathbf{d} = (d_i \mid i \in Q_0)$ *dimenzióvektorú reprezentációja*

$$L = (L_\alpha : V_{t(\alpha)} \to V_{h(\alpha)} \mid \alpha \in Q_1) \in \bigoplus_{\alpha \in Q_1} \mathrm{Hom}_K(V_{t(\alpha)}, V_{h(\alpha)}),$$

ahol minden $i \in Q_0$ csúcshoz rögzítettünk egy d_i-dimenziós V_i vektorteret (valamely rögzített K alaptest felett). Azonosítva V_i-t az oszlopvektorok K^{d_i} terével és az L_α lineáris leképezést a megfelelő $d_{h(\alpha)} \times d_{t(\alpha)}$ méretű balról szorzással ható mátrixszal, az L reprezentáció azonosítódik a Q tegez $\mathbf{d}$ dimenzióvektorú *reprezentációi terének* nevezett

$$\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} K^{d_{h(\alpha)} \times d_{t(\alpha)}}$$

affin tér egy pontjával. A

$$GL(\mathbf{d}) = \prod_{i \in Q_0} GL(d_i, K)$$

csoport hat a $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ téren: $g \cdot L = (g_{h(\alpha)} L_\alpha g_{t(\alpha)}^{-1} \mid \alpha \in Q_1)$ bármely $g = (g_i \mid i \in Q_0)$ csoportelemre és a reprezentációs tér $L \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ pontjára. Definíció szerint a reprezentációs tér két pontjához tartozó tegezreprezentációk akkor és csak akkor *ekvivalensek*, ha ugyanahhoz a $GL(\mathbf{d})$-pályához tartoznak.

A $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ reprezentációs tér koordinátagyűrűje a

$$K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})] = K[x^\alpha_{p,q} \mid \alpha \in Q_1,\ 1 \leq p \leq d_{h(\alpha)},\ 1 \leq q \leq d_{t(\alpha)}]$$

polinomgyűrű, ahol $x^\alpha_{p,q}$ az a függvény, amely az L reprezentációhoz az L_α mátrix (p, q)-adik elemét rendeli. Érdemes a változókra mint a $d_{h(\alpha)} \times d_{t(\alpha)}$ méretű $X_\alpha = (x^\alpha_{p,q})$ generikus mátrixok elemeire gondolni. A $GL(\mathbf{d})$ csoport elemei a koordinátagyűrű generátorain a következőképpen hatnak: $g \cdot x^\alpha_{p,q}$ a (p, q)-adik eleme a $g_{h(\alpha)}^{-1} X_\alpha g_{t(\alpha)}$ mátrixnak.

3.1. Tegezek polinominvariánsai

Amint azt az 1.1 Fejezetben vázoltuk, a $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) \to \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})//GL(\mathbf{d})$ algebrai hányados leképezés egy approximációja a $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ reprezentációs térbeli $GL(\mathbf{d})$-pályák osztályozási problémájának, ez utóbbi pedig az alapvető célja a reprezentációelméletnek. Az algebrai hányadostér pontjai kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak a Q tegez $\mathbf{d}$ dimenzióvektorú féligegyszerű reprezentációinak izomorfiaosztályaival. Továbbá a reprezentációs tér két pontja akkor és csak akkor tartozik az algebrai hányados leképezés egyazon fibrumához, ha a nekik megfelelő tegezreprezentációk Jordan-Hölder-féle kompozíciófaktorai megegyeznek (ld. [56]). A $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})//GL(\mathbf{d})$ algebrai hányadostér tanulmányozása egyenértékű a Q tegez $\mathbf{d}$ dimenzióvektorú reprezentációi polinominvariánsai $K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d})}$ algebrájának a tanulmányozásával. Érdemes megjegyezni, hogy abban a speciális esetben, amikor a Q tegez egyetlen csúcsból és m hurokélből áll, visszakapjuk a mátrixinvariánsok $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebrájának esetét, melyről az 1.1 és 1.2 Tételek szólnak.

Ebben az alfejezetben feltesszük, hogy K karakterisztikája 0. Legyen $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_s$ egy irányított kör Q-ban, azaz $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ nem feltétlenül különböző élek Q_1-ben úgy, hogy $h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$, ha $i = 1, \dots, s-1$, és $h(\alpha_s) = t(\alpha_1)$. Ekkor $L_\gamma = L_{\alpha_s} \circ \cdots \circ L_{\alpha_1}$ endomorfizmusa a $V_{t(\alpha_1)}$ vektortérnek. Jelölje X_γ az $X_{\alpha_s} \cdots X_{\alpha_1}$ mátrixszorzatot. Ekkor $\mathrm{Tr}(X_\gamma) \in K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]$ értéke az L reprezentáción az $L_{\alpha_s} \circ \cdots \circ L_{\alpha_1}$ négyzetes mátrix nyoma, és $\mathrm{Tr}(X_\gamma)$ világosan $GL(\mathbf{d})$-invariáns. Le Bruyn és Procesi [56] bebizonyította, hogy a $K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d})}$ algebrát generálják a $\mathrm{Tr}(X_\gamma)$ nyomok, ahol γ végigfut a Q-beli irányított körökön. (Később Donkin [33] bebizonyította ennek a tételnek tetszőleges karakterisztikában érvényes változatát.) A [56] szerzői kimondják, hogy ezen generátorok közti relációk bizonyos értelemben mind következnek a Cayley-Hamilton-féle tételből. Ennél lényegesen explicitebb és pontosabb leírását adtuk a generátorok közti relációknak a [15] cikkünkben, és bebizonyítottuk a 1.2 Tétel tegezekre vonatkozó alábbi általánosítását:

3.1. Tétel. *A $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebra $\mathrm{Tr}(X_\gamma)$ generátorai közt fennálló relációk ideálját generálják a $\Phi_{d_i+1}(X_{\gamma_1}, \dots, X_{\gamma_{d_i+1}}) = 0$ relációk, ahol $i \in Q_0$, és $\gamma_1, \dots, \gamma_{d_i+1}$ irányított körök Q-ban, melyek az i csúcsban kezdődnek és végződnek (a Φ definícióját ld. az 1.1 Fejezetben).*

A bizonyításhoz felhasználjuk a szimmetrikus csoport és a $K \times \cdots \times K$ algebra koszorúszorzatának reprezentációelméletét, továbbá a szimmetrikus csoport és az általános lineáris csoport reprezentációelmélete közti kapcsolatot feltáró Schur-Weyl-féle dualitásnak erre a koszorúszorzatra vonatkozó általánosítását (ld. [39], [63]).

3.2. Tegezek szemi-invariánsai

Polinominvariánsokkal nem választhatók szét olyan pályák, melyek Zariski-lezártja metszi egymást. Speciálisan ha a tegez nem tartalmaz irányított kört, akkor nincsenek nem-konstans polinominvariánsok. Ugyanakkor létezhetnek nem-konstans racionális invariánsok, melyek azonos súlyú relatív invariánsok hányadosaként keletkeznek. Továbbá a relatív invariánsokra támaszkodva tegezreprezentációk bizonyos családjait parametrizáló modulustereket konstruálhatunk. Ezért ésszerű az általános lineáris csoportok szorzatát a megfelelő speciális lineáris csoportok szorzatára cserélni, és ennek a kisebb csoportnak a polinominvariánsait –ezek az úgynevezett szemi-invariánsok– tanulmányozni.

Rögzítsünk egy Q tegezt és egy $\mathbf{d}$ dimenzióvektort. Szorítsuk meg a $GL(\mathbf{d})$ csoport $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ reprezentációs téren való hatását az $SL(\mathbf{d}) = \prod_{i \in Q_0} SL(d_i, K)$ kommutátor részcsoportra. A polinominvariánsok $K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{SL(\mathbf{d})}$ halmazát nevezik a Q tegez $\mathbf{d}$ dimenzóvektorhoz tartozó *szemi-invariánsai elgebrájának*. Ezen az algebrán létezik egy természetes $\mathbb{Z}^{Q_0}$-fokszámozás:

$$K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{SL(\mathbf{d})} = \bigoplus_{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}^{Q_0}} K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d}), \mathbf{w}},$$

ahol

$$K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d}), \mathbf{w}} = \{f \in K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})] \mid g \cdot f = (\prod_{i \in Q_0} \det{}^{w_i}(g_i))f \quad \forall g \in GL(\mathbf{d})\}$$

a $\mathbf{w}$ *súlyú relatív invariánsok tere*. Világos, hogy rögzített $\mathbf{w}$ súly esetén

$$\bigoplus_{n \geq 0} K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d}), n\mathbf{w}}$$

részalgebrája a szemi-invariánsok algebrájának. King [51] megmutatta, hogy ennek a fokszámozott algebrának a projektív spektruma a $\mathbf{w}$-szemistabil tegezreprezentációk családjainak durva modulustere (Mumford geometriai invariánselméletének ezen fogalmaihoz olvasható kalauz [58]).

Ez a jelentősége tegezek szemi-invariánsainak, melyek tanulmányozását Kac [49] kezdte. Fontos eredményeket ért el Schofield [70] abban az esetben, amikor a reprezentációs tér tartalmaz egy nyílt pályát. Kiterjedt irodalma van a Dynkin-féle és az euklideszi (vagy kibővített Dynkin) tegezek szemi-invariánsainak, ld. [1], [66], [42], [43], [54], [55], [44], [73], [76]. Ezen cikkek szerzői megsejtenek néhány szemi-invariánst, majd geometriai, kombinatorikus vagy reprezetációelméleti érveléssel belátják, hogy megtalálták az összeset (generálás erejéig).

Van egy kézenfekvő módja szemi-invariánsok felírásának: a tegezreprezentáció mátrixkomponenseit mint blokkokat használva felépíthetünk négyzetes mátrixokat, melyek determinánsa (vagy annak bizonyos részleges polarizáltjai) szemi-invariánsok. A. N. Zubkov-val közös [20] cikkünkben bebizonyítottuk, hogy minden szemi-invariáns megkapható így, bármilyen tegez esetén. Ebben az alfejezetben K tetszőleges végtelen test.

Munkánk első lépésében redukáljuk a problémát páros tegezek esetére. Tetszőleges tegez reprezentációi kategóriájának van egy jól ismert beágyazása egy páros tegez reprezentációi kategóriájába, ld. pl. [71]. Legyenek a $Q = (Q_0, Q_1, t, h)$ tegez csúcsai $Q_0 = \{1, \dots, v\}$. Konstruáljunk egy új $Q^D = (Q_0^D, Q_1^D, t^D, h^D)$ megduplázott tegezt a következőképpen: a csúcsok halmaza $Q_0^D = \{1, \dots, v\} \bigcup \{-1, \dots, -v\}$, az élek halmaza $Q_1^D = Q_1 \bigcup \{\beta_1, \dots, \beta_v\}$ úgy, hogy minden $\alpha \in Q_1$ élre $t^D(\alpha) = t(\alpha)$, $h^D(\alpha) = -h(\alpha)$, és minden $i \in Q_0$ csúcsra $t^D(\beta_i) = i$, $h^D(\beta_i) = -i$. Világos, hogy Q^D páros tegez, azaz nincs benne egynél hosszabb irányított út. A Q tegezhez tartozó tetszőleges $\mathbf{d}$ dimenzióvektor esetén jelölje $(\mathbf{d}, \mathbf{d})$ azt a Q^D-hez tartozó dimenzióvektort, amely a d_i értéket veszi fel az i és $-i$ csúcsoknál minden $i \in Q_0$-ra. Legyen $\mathrm{Rep}_1(Q^D, (\mathbf{d}, \mathbf{d}))$ az a részhalmaz $\mathrm{Rep}(Q^D, (\mathbf{d}, \mathbf{d}))$-ben, amely azon L pontokból áll, melyekre $\det L_{\beta_i} = 1$ minden $i \in Q_0$-ra. A kulcsfontosságú észrevételünk, hogy $\mathrm{Rep}_1(Q^D, (\mathbf{d}, \mathbf{d}))$ azonosítható az $SL(\mathbf{d}, \mathbf{d}) \times^{SL(\mathbf{d})} \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ asszociált fibrumnyalábbal. Ebből Frobenius-reciprocitás alapján nyerjük a következő, önmagában is figyelemre méltó állítást:

3.2. Tétel. *Az $X_{\beta_i} \mapsto I_{d_i}$, $i = 1, \dots, v$ specializáció (I_n jelöli az $n \times n$-es egységmátrixot) által indukált $K[\mathrm{Rep}(Q^D, (\mathbf{d}, \mathbf{d}))] \to K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]$ szürjekciónak az $SL(\mathbf{d}, \mathbf{d})$-invariánsok algebrájára való*

$$K[\mathrm{Rep}(Q^D, (\mathbf{d}, \mathbf{d}))]^{SL(\mathbf{d}, \mathbf{d})} \to K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{SL(\mathbf{d})}$$

megszorítása is szürjektív, továbbá $K[\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})]^{SL(\mathbf{d})} \cong K[\mathrm{Rep}_1(Q^D, (\mathbf{d}, \mathbf{d}))]^{SL(\mathbf{d}, \mathbf{d})}$.

Ezután rátérünk páros tegezek szemi-invariánsaira. A továbbiakban legyen Q páros tegez, azaz minden csúcsa vagy forrás (nem mutat bele él) vagy nyelő (nem indul ki belőle él). Jelölje $1, \dots, k$ a forrás csúcsokat, $-1, \dots, -l$ a nyelő csúcsokat. Egy a Q tegezhez tartozó dimenzióvektort jelöljön $(\mathbf{n}, \mathbf{m})$, ahol n_i az i forráson felvett érték ($i = 1, \dots, k$) és m_j a $-j$ nyelőn felvett érték ($j = 1, \dots, l$). Hasonló konvenciót alkalmazunk a páros tegezhez tartozó súlyok jelölésénél. Azt mondjuk, hogy egy súly *megengedett*, ha $(\mathbf{r}, -\mathbf{q})$ alakú, ahol $\mathbf{r} \in \mathbb{N}_0^k$, $\mathbf{q} \in \mathbb{N}_0^l$, továbbá $\sum_{i=1}^l m_i q_i = \sum_{j=1}^k n_j r_j$. Adott $(\mathbf{r}, -\mathbf{q})$ megengedett súlyhoz és minden $\alpha \in Q_1$ élhez vezessünk be egy új, $q_{h(\alpha)} \times r_{t(\alpha)}$ méretű $Y_\alpha = (y_{i,j}^\alpha)$ generikus mátrixot. Építsük fel a $C(X, Y)$ mátrixot $l \times k$ blokkból a következőképpen: $(a, b) \in \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, k\}$ esetén az (a, b) pozícióban található blokk legyen $\sum_{(a,b)=(t(\alpha),h(\alpha))} X_\alpha \otimes Y_\alpha$, ahol $\otimes$ a megfelelő mátrixok Kronecker-féle szorzatát jelöli, az üres összeg pedig a megfelelő méretű nullmátrix. A súlyra tett feltevésünk miatt $C(X, Y)$ négyzetes mátrix, így képezhetjük a determinánsát, melyet $\chi(X, Y)$ jelöl. (Ez a konstrukció felfogható a karakterisztikus polinom általánosításának.)

3.3. Tétel. *A $K[\mathrm{Rep}(Q, (\mathbf{n}, \mathbf{m}))]$ koordinátagyűrűben tetszőleges nem-nulla relatív $GL(\mathbf{n}, \mathbf{m})$-invariáns súlya megengedett súly. Amennyiben $(\mathbf{r}, -\mathbf{q})$ megengedett súly, az $(\mathbf{r}, -\mathbf{q})$ súlyú relatív $GL(\mathbf{n}, \mathbf{m})$-invariánsok terét kifeszítik $\chi(X, Y)$-nak, mint az $y_{i,j}^\alpha$ változók polinomjának az együtthatói.*

Ez a tétel egy kicsit pontosabb, a szemi-invariánsok lehetséges multifokára vonatkozó számelméleti feltételeket is tekintetbe vevő állítás következménye. Annak a megfogalmazása azonban sokkal körülményesebb annál, hogy érdemes lenne szerepeltetni ebben az összefoglalásban. Bizonyításunk meglehetősen természetes, és nagy vonalakban a klasszikus invariánselmélet első alaptételének (ld.

[10]) a megfelelő lefordítása. A karakterisztikától független bizonyítás ugyanakkor komoly technikai nehézséget jelent, melynek áthidalásához az algebrai csoportok reprezentációelméletéből ismert, úgynevezett jól filtrált modulusok elméletét használjuk (a korábbi hasonló jellegű alkalmazásokhoz képest átláthatóbb módon).

Megjegyezzük, hogy a miénktől függetlenül két másik megoldás is született ugyanerre a problémára. Schofield [70] bevezetett egy reprezentációelméleti tartalmú módszert szemi-invariánsok konstruálására. Derksen és Weyman [13] irányított kört nem tartalmazó tegezek esetén, Schofield és Van den Bergh [72] pedig nulla karakterisztikájú alaptest esetén belátta, hogy ezek a szemi-invariánsok kimerítik az összeset. Ezen cikkek erénye, hogy megvilágítják a szemi-invariánsok reprezentációelméleti tartalmát. Technikai szempontból a mi eredményünk a legerősebb, nem tartalmazván megszorítást se a tegezre, se a karakterisztikára.

3.3. Tegezreprezentációk előírt relációkkal

A tegezreprezentációk formalizmusa alapvető eszköz az asszociatív algebrák reprezentációelméletében. Ebben a fejezetben Λ egy véges dimenziós algebra a K algebrailag zárt test felett, $\mathrm{mod}\Lambda$ pedig a véges dimenziós jobboldali Λ-modulusok kategóriája. Az alábbiakban felhasznált véges dimenziós algebrákkal kapcsolatos alapvető anyag megtalálható például a [4] könyvben. Tetszőleges véges dimenziós K-algebra Morita-ekvivalens egy bázisalgebrával, ezért feltesszük, hogy $\Lambda/\mathrm{rad}(\Lambda) \cong K \times \cdots \times K$. Ekkor Λ prezentálható mint egy Q tegez KQ útalgebrájának megengedett relációk Ω halmaza által generált ideálja szerinti faktora. A tegez egyértelműen meghatározott, és gyakran a Λ algebra Gabriel-féle tegezének nevezik. Egy *irányított út* Q-ban éleknek egy $\pi = \alpha_1 \cdots \alpha_s$ sorozata, ahol $h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$ $(i = 1, \ldots, s-1)$. A π út hosszán az s számot értjük. Vezessük be a $t(\pi) = t(\alpha_1)$, $h(\pi) = h(\alpha_s)$, jelöléseket, továbbá minden $v \in Q_0$ csúcsra legyen ε_v az a nulla hosszúságú út, melyre $t(\varepsilon_v) = v = h(\varepsilon_v)$. A *$KQ$ útalgebra* K-vektortér bázisát alkotják a Q-beli irányított utak, és a π, σ irányított utak $\pi\sigma$ szorzata az egymás után illesztésük, amennyiben $h(\pi) = t(\sigma)$, és nulla egyébként. Egy *megengedett reláció* Q-n irányított utaknak egy $\rho = a_1\pi_1 + \cdots + a_n\pi_n$ K-lineáris kombinációja, ahol $t(\pi_1) = \cdots = t(\pi_n)$ és $h(\pi_1) = \cdots = h(\pi_n)$, valamint π_i hossza legalább 2 minden i-re. A továbbiakban feltesszük, hogy $\Lambda = KQ/\langle\Omega\rangle$, és megtartjuk a π jelölést egy Q-beli irányított út Λ-beli képére. Speciálisan $\{\varepsilon_v \mid v \in Q_0\}$ minimális idempotensek teljes rendszere Λ-ban, és Λ-t mint K-algebrát generálja $\{\alpha, \varepsilon_v \mid \alpha \in Q_1, v \in Q_0\}$.

Egy $M \in \mathrm{mod}\Lambda$ felbomlik mint $M = \bigoplus_{v \in Q_0} M_v$, ahol $M_v = M\varepsilon_v$. Az $\alpha \in Q_1$ elemmel való szorzás indukál egy $M_\alpha : M_{t(\alpha)} \to M_{h(\alpha)}$ lineáris leképezést. Így az M modulus meghatározza vektortereknek és köztük menő lineáris leképezéseknek $(M_v, M_\alpha \mid v \in Q_0, \alpha \in Q_1)$ gyűjteményét, vagy másszóval a Q tegez egy reprezentációját (melyet szintén az M szimbólummal jelölünk). Az így kapott tegezreprezentáció kielégíti az Ω relációkat. Ez a következőt jelenti. Egy $\pi = \alpha_1 \cdots \alpha_s$ irányított út esetén tekintsük az $M_\pi = M_{\alpha_s} \circ \cdots \circ M_{\alpha_1}$ lineáris leképezést $M_{t(\pi)}$-ből $M_{h(\pi)}$-be, és $\rho = \sum a_\pi \pi \in \Omega$ esetén legyen $M_\rho = \sum a_\pi M_\pi$. Ezzel a jelöléssel fennáll, hogy $M_\rho = 0$ minden $\rho \in \Omega$-ra. Fordítva, a Q tegez egy $(M_v, M_\alpha \mid v \in Q_0, \alpha \in Q_1)$ reprezentációjához természetes módon tartozik egy KQ-modulus struktúra a $\bigoplus_{v \in Q_0} M_v$ vektortéren: az $\alpha \in Q_1$ útalgebrabeli elemmel való jobbról szorzás az $M_{t(\alpha)}$ komponenst leképezi $M_{h(\alpha)}$-ba az M_α által, és anullálja a többi M_v komponenst. Ez a KQ-modulus akkor és csak akkor Λ-modulus (azaz Ω anullálja), ha az eredeti tegezreprezentáció kielégíti az Ω relációkat.

Az M modulus $\mathbf{d}^M$ *dimenzióvektorán* a megfelelő tegezreprezentáció $(\dim_K(M_v) \mid v \in Q_0)$ dimenzióvektorát értjük. Ez reprezentálja az M osztályát a $K_0(\mathrm{mod}\Lambda) = \mathbb{Z}^{Q_0}$ Grothendieck-csoportban, ugyanis az egyszerű Λ-modulusok izomorfiaosztályait Q_0 indexeli, és az egyszerű modulusok dimenzióvektorai éppen a $\mathbb{Z}^{Q_0}$ standard bázisvektorai. Adott

$$x = (x_\alpha \mid \alpha \in Q_1) \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$$

pont (itt $x_\alpha \in K^{d_{h(\alpha)} \times d_{t(\alpha)}}$) esetén jelölje $M(x)$ a Q tegez megfelelő reprezentációját (és a hozzá tartozó KQ-modulust is). Azaz $M(x)_v = K^{d_v}$, az oszlopvektorok tere, melyen az $M(x)_\alpha$ lineáris leképezés az x_α mátrixszal való balról szorzásként hat. Tekintsük az

$$\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{d}) = \{x \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) \mid M(x) \in \mathrm{mod}\Lambda\}$$

$GL(\mathbf{d})$-invariáns Zariski-zárt részhalmazt a $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ affin térben, melyet a **d** *dimenzióvektorú Λ-modulusok varietásának* hívnak. A $\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{d})$ affin algebrai varietásbeli $GL(\mathbf{d})$-pályák kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésben állnak a $\mathbf{d}$ dimenzióvektorú Λ-modulusok izomorfiaosztályaival. (Modulusvarietásokról jó képet ad Bongartz [6] áttekintő cikke.)

*Súly*on a továbbiakban egy $K_0(\mathrm{mod}\Lambda) \to \mathbb{Z}$ additív függvényt értünk. A $\mathbf{w}$ súlyt azonosítjuk a $(w_v \mid v \in Q_0) \in \mathbb{Z}^{Q_0}$ vektorral úgy, hogy $\mathbf{w}(\mathbf{d}) = \sum_{v \in Q_0} w_v d_v$ minden $\mathbf{d} \in K_0(\mathrm{mod}\Lambda)$-ra. Továbbá rögzített $\mathbf{f}$ dimenzióvektor mellett a $\mathbf{w}$ súlyhoz tartozik a $\chi^{\mathbf{w}} : GL(\mathbf{f}) \to K^*$, $\chi^{\mathbf{w}}(g) = \prod_{v \in \mathrm{supp}(\mathbf{f})} \det(g_v)^{w_v}$ racionális karakter. Emlékeztetünk rá, hogy

$$K[\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d}), \mathbf{w}} = \{f \in K[\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{d})] \mid g \cdot f = \chi^{\mathbf{w}}(g) f \quad \forall g \in GL(\mathbf{d})\}$$

a $\mathbf{w}$ súlyú relatív invariánsok tere, és a

$$\mathrm{Proj}(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} K[\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{d})]^{GL(\mathbf{d}), n\mathbf{w}})$$

projektív algebrai varietás durva modulustér Λ-modulusok $\mathbf{w}$-szemistabil családjaira (ld. [51]). A $\mathbb{Z}^{Q_0}$-on értelmezett Ringel-féle bilineáris forma a következő:

$$\langle \mathbf{d}, \mathbf{f} \rangle_Q = \sum_{v \in Q_0} d_v f_v - \sum_{\alpha \in Q_1} d_{t(\alpha)} f_{h(\alpha)}.$$

Jelentőségét az adja, hogy M, N tetszőleges KQ-modulusok esetén

$$\langle \mathbf{d}^M, \mathbf{d}^N \rangle_Q = \dim_K \mathrm{Hom}_{KQ}(M, N) - \dim_K \mathrm{Ext}^1_{KQ}(M, N). \tag{4}$$

A továbbiakhoz döntő jelentőségű Schofield [70] alábbi eredménye. Feltéve, hogy a Q tegez nem tartalmaz irányított kört, egy M tegezreprezentációhoz és a $\langle \mathbf{d}^M, \mathbf{f} \rangle_Q = 0$ egyenlőséget kielégítő $\mathbf{f}$ dimenzióvektorhoz Schofield konstruált egy $\Delta^M_{\mathbf{f}}$ relatív invariáns polinomfüggvényt a $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{f})$ reprezentációs téren, melynek súlya $\langle \mathbf{d}^M, - \rangle_Q$, és $\Delta^M_{\mathbf{f}}(x) \neq 0$ valamely $x \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{f})$ pontra akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Hom}_{KQ}(M, M(x)) = 0$.

A [22] dolgozatunkban sikerült átvinnünk ezt a konstrukciót tetszőleges Λ véges dimenziós bázisalgebrára. Megjegyezzük, hogy a véges dimenziós algebrák közül a tegezek útalgebrái éppen az öröklődő algebrák, azaz azok, amelyek globális dimenziója 1. Tehát az általánosítás tartalma lényegében az, hogy megszabadulunk a globális dimenzióra tett erős megkötéstől. Minden M Λ-modulushoz rendelünk egy $\mathbf{w}^M$ súlyt, mely az M minimális projektív feloldásában szereplő felbonthatatlan projektív modulusok multiplicitásaitól függ. A $\mathbf{w}^M$ súlyt karakterizálja a következő tulajdonsága: tetszőleges $N \in \mathrm{mod}\Lambda$ esetén fennáll a

$$\mathbf{w}^M(\mathbf{d}^N) = \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) - \dim_K \mathrm{Hom}_\Lambda(N, \tau M), \tag{5}$$

egyenlőség, ahol τ az Auslander-Reiten-féle eltolás. Tetszőleges a $\mathbf{w}^M(\mathbf{f}) = 0$ egyenlőséget kielégítő dimenzióvektorra konstruálunk egy nem-nulla skalárszorzó erejéig meghatározott $\delta^M_{\mathbf{f}}$ relatív invariáns polinomfüggvényt a $\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{f})$ varietáson. A $\delta^M_{\mathbf{f}}$ relatív invariáns súlya $\mathbf{w}^M$, valamint $\delta^M_{\mathbf{f}}(x) \neq 0$ valamely $x \in \mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{f})$ pontra akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, M(x)) = 0$. Amennyiben $\mathrm{char}(K) \neq 0$, a $GL(\mathbf{f})$ csoport lineárisan reduktív, ezért a tegezek szemi-invariánsainak [72] cikkbeli leírását alkalmazva nyerjük a következőket:

3.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy char*$(K) = 0$. *A* $K[\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{f})]^{GL(\mathbf{f}), \mathbf{w}}$ *teret kifeszítik azon* M *modulusokhoz tartozó* $\delta^M_{\mathbf{f}}$ *relatív invariánsok, melyekre* $\mathbf{w}^M = \mathbf{w}$.

3.5. Következmény. *Tegyük fel, hogy char*$(K) = 0$. *A szemi-invariánsok* $K[\mathcal{R}(\Lambda, \mathbf{f})]^{SL(\mathbf{f})}$ *algebráját generálják (mint* K*-algebrát) azon direkt felbonthatatlan nem-projektív* M *modulusokhoz tartozó* $\delta^M_{\mathbf{f}}$ *relatív invariánsok, melyekre* $\mathbf{w}^M(\mathbf{f}) = 0$.

A (4) és (5) formulák összevetése jól megragad valamit az öröklődő, illetve a tetszőleges véges dimenziós algebrák esete közti különbségből. Általában az $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, N)$ duális terét a $\mathrm{Hom}_\Lambda(N, \tau M)$ egy faktorterével azonosítja az Auslander-Reiten-féle formula. Továbbá $\Lambda = KQ$ esetén $\mathbf{w}^M$ csak az M dimenzióvektorától függ, mivel $\mathbf{w}^M = \langle \mathbf{d}^M, - \rangle_Q$. Általában viszont $\mathbf{w}^M$, $\mathbf{w}^{M'}$ különbözhet azonos dimenzióvektorú M, M' modulusokra.

Előírt relációkat teljesítő tegezreprezentációk szemi-invariánsaival (a tegez irányított körmentességét feltételezve) velünk egyidőben foglalkozott Derksen és Weyman [14]. Az átfedés dacára a [14] és [22] cikkek hangsúlyai és mellékeredményei jelentősen különböznek.

4. Moduláris és szeparáló invariánsok

4.1. mátrixinvariánsok pozitív karakterisztikában

Ebben a fejezetben K végtelen test és $\mathrm{char}(K) = p$ pozitív. Rögzítsük az n, m természetes számokat, $n \geq 2$. Tetszőleges kommutatív gyűrű feletti $n \times n$-es A mátrixra jelölje $\chi_j(A)$ az A karakterisztikus polinomjának a j-edik együtthatóját, melyet a

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n - \chi_1(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \chi_n(A) I$$

egyenlőséggel definiálunk, ahol λ kommutatív változó és I az egységmatrix. A 1.1 Tétel minden karakterisztikában érvényes általánosítását Donkin [32] bizonyította: a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebrát generálja

$$\{\chi_j(X_{i_1} \cdots X_{i_s}) \mid 1 \leq j \leq n,\ s \in \mathbb{N},\ 1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq m\}. \tag{6}$$

A [24] dolgozatunkban levezettünk ebből egy véges generátorrendszert. Kaplansky [50] egy régi tétele szerint ha B egy olyan végesen (mondjuk m elemmel) generált K-algebra (nem egységelemes), amelynek minden b elemére $b^n = 0$ (n rögzített), akkor B nilpotens, azaz létezik olyan N természetes szám, hogy $b_1 \cdots b_N = 0$ minden $b_1, \ldots, b_N \in B$ esetén. A minimális ilyen N számot jelölje $N(n, m, p)$ (könnyen látható, hogy ez a szám K-nak csak a karakterisztikájától függ). Explicit felső korlátot adott $N(n, m, p)$-re Belov [5], aki megmutatta, hogy $N(n, m, p) \leq n^6 m^{n+1}$. Ezt az $N(n, m, p) < \frac{1}{6} n^6 m^n$ becslésre javította Klein [52].

Mi egy a csírájában Dubnov és Ivanov [35] dolgozatában fellelhető ötletet a jelen helyzetre adaptálva megmutattuk, hogy a (6) generátorrendszerben feltehető, hogy $s \leq N(n, m, p)$. Amitsur [2] formuláit használva felfedeztünk egy új összefüggést a karakterisztikus polinom együtthatói között, ami a determinánsok szorzástételének egyfajta gyengített általánosítása. Végeredményben az alábbi tételeket bizonyítottuk:

4.1. Tétel. *A $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebrát generálja $\chi_j(X_i)$, $\chi_k(X_{i_1} \cdots X_{i_s})$, ahol $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq n$, $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $s \leq N(n, m, p)$, $1 \leq i, i_1, \ldots, i_s \leq m$.*

(Itt $\lfloor - \rfloor$ az alsó egészrészt jelöli.)

4.2. Következmény. *Tegyük fel, hogy char$(K) = p > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Ekkor a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebrát generálja $\chi_j(X_i)$, $\mathrm{Tr}(X_{i_1} \cdots X_{i_s})$, ahol $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \leq j \leq n$, $s \leq N(n, m, p)$, $1 \leq i, i_1, \ldots, i_s \leq m$.*

A mátrixinvariánsok algebrájának generátoraira vonatkozó felső fokszám becslések után olyan eredményekre térünk, melyek a generáláshoz szükséges fokszámra alsó becsléseket implikálnak. Az értekezésben a 2.4 Tételből levezetjük, hogy amennyiben $p \leq n$, akkor a $\mathrm{Tr}(X_1 \cdots X_m)$ invariáns *felbonthatatlan*, azaz nem fejezhető ki $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ nála alacsonyabb fokú elemei polinomjaként. Sőt, belátjuk az alábbi erősebb állítást.

4.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $p^r \leq n$ valamely r pozitív egészre. Ekkor $\chi_j(X_1 \cdots X_m)$ felbonthatatlan a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebrában $j = 1, \ldots, p^r - 1$ esetén.*

4.4. Következmény. *Tegyük fel, hogy $p^r \leq n$ valamely r pozitív egészre. Ekkor a $K[\mathrm{Rep}(F_m, n)]^{GL(n,K)}$ algebrát nem generálják azon elemei, melyek foka kisebb, mint $m(p^r - 1)$.*

Jelölje V^m a V G-modulus m-szeres direkt összegét. Weyl [80] egy alapvető tételének következménye, hogy a $\{\beta(G, V^m) \mid m = 1, 2, \ldots\}$ sorozat stabilizálódik $m = \dim(V)$-nél (a β definícióját ld. a 2.2 Fejezetben). A 4.4 Következmény fontos tanulsága, hogy

$$\mathrm{char}(K) > 0 \text{ esetén megtörténhet, hogy } \lim_{m \to \infty} \beta(G, V^m) = \infty. \tag{7}$$

Ez a jelenség ismert volt véges csoportokra (ld. [64]). Arra, hogy ez megtörténhet összefüggő reduktív algebrai csoportok természetes reprezentációival is, a mátrixinvariánsok általunk vizsgált esete az első példa az irodalomban (ld. [25]). Külön érdekessége ennek a példának, hogy a mátrixinvariánsok elméletének jórésze független a karakterisztikától, mint: a generátorok szimbolikus leírása; a kvantitatív viselkedés (azaz az invariáns algebra homogén komponenseinek a dimenzója); a Cohen-Macaulay tulajdonság. Úgyhogy az általunk ismert legjobb módja a nullkarakterisztikás és a moduláris eset közti éles különbségtételnek a (7) kimutatása az utóbbi esetben.

4.2. Szeparáló invariánsok

Weyl előbb említett tétele azt mondja, hogy ha $\mathrm{char}(K) = 0$ és V, W tetszőleges véges dimenziós G-modulusok, $n = \dim(V)$, akkor a $K[W \oplus V^m]^G$ algebrát generálják a $K[W \oplus V^n]^G$ generátorainak a V-típusú vektorváltozókra vonatkozó *polarizáltjai*. A (7) jelenség felveti azt az ötletet, hogy keressük Weyl polarizációs tételének olyan gyengített változatát, amely pozitív karakterisztikában is érvényes, a "generálás" tulajdonságának "szeparálás"-ra való gyengítésével.

Azt mondjuk, hogy $v, v' \in V$ *szeparálható (polinominvariánsokkal)*, ha van olyan $f \in K[V]^G$, amelyre $f(v) \neq f(v')$. A [12] könyvet követve azt mondjuk, hogy $S \subseteq K[V]^G$ *szeparáló rendszer*, ha tetszőleges szeparálható $v, v' \in V$ pontok esetén található S-ben olyan f, amelyre $f(v) \neq f(v')$. A "szeparáló rendszer" fogalma természetes általánosítása a "generátorrendszer" fogalmának. Néhány alapvető eredmény és motiváció olvasható a [12] könyvben. A közelmúltban Draisma, Kemper és Wehlau [34] belátták, hogy Weyl tételének szeparáló rendszerekre vonatkozó analógja érvényes minden karakterisztikában. Ugyanezzel a kérdéssel foglalkozik Grosshans [40] preprintje is.

A [30] cikkhez az az észrevételünk vezetett, hogy ha szeparáló rendszereket tekintünk, akkor a polarizációnak már egy triviális speciális változata is elegendő. Adott $f \in K[W \oplus V^d]$, $m \geq d \in \mathbb{N}$, és $1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq m$ esetén jelölje $f^{(i_1,\ldots,i_d)}$ az $f \circ \pi_{(i_1,\ldots,i_d)} : W \oplus V^m \to k$ függvényt, ahol $\pi_{(i_1,\ldots,i_d)}$ a $(w, v_1, \ldots, v_m) \mapsto (w, v_{i_1}, \ldots, v_{i_d})$ projekció.

4.5. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $S \subseteq K[W \oplus V^d]^G$ tipikus szeparáló invariánsok teljes rendszere (a V típusú változókban W-re nézve), ha minden $m \in \mathbb{N}$, $m \geq d$ esetén*

$$S^{(m)} = \{f^{(i_1,\ldots,i_d)} \mid f \in S, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_d \leq m\}$$

szeparáló rendszer $K[W \oplus V^m]^G - ben.$

Ezen fogalom létjogosultágát az alábbi, általános érvényű tény igazolja:

4.6. Tétel. *Legyen S szeparáló rendszer $K[W \oplus V^{2n}]^G$-ben, ahol $n = \dim(V)$. Akkor S tipikus szeparáló invariánsok teljes rendszere (a V típusú változókban W-re nézve).*

4.7. Definíció. *Jelölje $\sigma(G, W, V)$ a minimális olyan $d \in \mathbb{N}_0$ számot, amelyre $K[W \oplus V^d]^G$ tartalmazza tipikus szeparáló invariánsok teljes rendszerét.*

Reduktív algebrai csoportokra (algebrai csoportokról ld. a [7] könyvet) a 4.6 Tétel javítható:

4.8. Tétel. *Tetszőleges G redukív algebrai csoport és W, V véges dimenziós racionális G-modulusok esetén $\sigma(G, W, V) \leq \dim(V) + 1$.*

Ez utóbbi eredmény élességét igazoló példát is adunk az értekezésben.

Az XIX. századi klasszikus invariánselmélet elsősorban binér formák polinominvariánsaival foglalkozott (ld. pl. [60]). Jelölje $\mathrm{Pol}_d(\mathbb{C}^2)$ a homogén d-edfokú komplex együtthatós kétváltozós formák terét. Ezek izomorfia erejéig teljes listáját alkotják az irreducibilis racionális $SL(2, \mathbb{C})$-modulusoknak $(d = 0, 1, 2, \ldots)$.

4.9. Tétel. *Tetszőleges W véges dimenziós racionális $SL(2, \mathbb{C})$-modulus és V irreducibilis racionális $SL(2, \mathbb{C})$-modulus esetén fennáll a $\sigma(SL(2, \mathbb{C}), W, V) \leq 7$ egyenlőtlenség.*

Ebben az eredményben váratlan a σ-ra vonatkozó W-től és V-től független korlát létezése. Továbbá tetszőleges véges dimenziós racionális $SL(2, \mathbb{C})$-modulus felbomlik $V_1^{m_1} \oplus \cdots \oplus V_r^{m_r}$ direkt összegként (ahol $V_1, \ldots, V_r$ páronként nem-izomorf $SL(2, \mathbb{C})$-modulusok). A 4.9 Tételből következik, hogy $\mathbb{C}[\bigoplus_{i=1}^r V_i^{m_i}]^{SL(2,\mathbb{C})}$ mindig tartalmaz olyan szeparáló rendszert, melynek elemei legfeljebb 7 darab V_i típusú vektorváltozótól függnek minden $i = 1, \ldots, r$ esetén.

A 4.9 Tétel bizonyításához felső becslést adunk $\sigma(G, W, V)$-re az $SL(2, \mathbb{C})$ minden véges részcsoportja esetén. Ennek során bármely rögzített G véges csoportra kifejezzük a $\sigma(G, W, V)$ számok szuprémumát mint a G csoport egy tisztán csoportelméleti jellegű invariánsát.

Végül bemutatjuk a 4.6 Tételnek egy kvázi-projektív algebrai sokaságokon való algebrai csoporthatások racionális invariánsaira vonatkozó megfelelőjét. Megjegyezzük, hogy racionális invariánsok esetében a polarizáció általános változatának nincs is értelme.

Hivatkozások

[1] S. Abeasis, Codimension 1 orbits and semi-invariants for the representations of an equioriented graph of type D_n, Trans. Amer. Math. Soc. 286 (1984), 91-123.

[2] S. A. Amitsur, On the characteristic polynomial of a sum of matrices, Lin. Multilin. Alg. 8 (1980), 177-182.

[3] M. Artin, On Azumaya algebras and finite dimensional representations of rings, J. Algebra 11 (1969), 532-563.

[4] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge University Press, 1995.

[5] A. J. Belov, Some estimations for nilpotence of nil-algebras over a field of an arbitrary characteristic and height theorem, Comm. Alg. 20, No. 10 (1992), 2919-2922.

[6] K. Bongartz, Some geometric aspects of representation theory, Algebras and Modules I, CMS Conf. Proc. 23 (1998), 1-27, (I. Reiten, S.O. Smalø, Ø. Solberg, editors).

[7] A. Borel, Linear Algebraic Groups, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 126. Springer-Verlag, New York, 1991.

[8] V. M. Bukhshtaber and E. G. Rees, Rings of continuous functions, symmetric products, and Frobenius algebras (Russian), Uspekhi Mat. Nauk 59 (2004), no. 1(355), 125-144; translation in Russian Math. Surveys 59 (2004), no. 1, 125-145.

[9] J. Dalbec, Multisymmetric functions, Beiträge Algebra Geom. 40, No.1 (1999), 27-51.

[10] C. de Concini and C. Procesi, A characteristic free approach to invariant theory, Adv. Math. 21 (1976), 330-354.

[11] H. Derksen, Degree bounds for syzygies of invariants, Adv. Math. 185 (2004), no. 2, 207-214.

[12] H. Derksen and G. Kemper, Computational Invariant Theory, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[13] H. Derksen and J. Weyman, Semi-invariants of quivers and saturation for Littlewood-Richardson coefficients, J. Amer. Math. Soc. 13 (2000), 467-479.

[14] H. Derksen and J. Weyman, Semi-invariants for quivers with relations, J. Algebra 258 (2002), no.1, 216-227.

[15] M. Domokos, Invariants of quivers and wreath products, Comm. Alg. 26(9) (1998), 2807-2819.

[16] M. Domokos and P. Hegedűs, Noether's bound for polynomial invariants of finite groups, Arch. Math. 74 (2000), 161-167.

[17] M. Domokos and H. Lenzing, Invariant theory of canonical algebras, J. Algebra 228 (2000), 738-762.

[18] M. Domokos, Relative invariants of 3×3 matrix triples, Linear Multilin. Alg. 47 (2000), 175-190.

[19] M. Domokos, Poincaré series of semi-invariants of 2×2 matrices, Lin. Algebra Appl. 310 (2000), 183-194.

[20] M. Domokos and A. N. Zubkov, Semi-invariants of quivers as determinants, Transform. Groups 6, No. 1 (2001), 9-24.

[21] M. Domokos, Invariant theory of algebra representations, in Algebra - Representation Theory, Constanta 2000 (ed. K. W. Roggenkamp and M. Stefanescu), NATO Science Series II. Mathematics, Physics and Chemistry 28 (2001), 47-61, Kluwer.

[22] M. Domokos, Relative invariants for representations of finite dimensional algebras, Manuscr. Math. 108 (2002), 123-133.

[23] M. Domokos and H. Lenzing, Moduli spaces for representations of concealed-canonical algebras, J. Algebra 251 (2002), 1-24.

[24] M. Domokos, Finite generating system of matrix invariants, Math. Pannonica 13 (2002), 175-181.

[25] M. Domokos, S. G. Kuzmin, A. N. Zubkov, Rings of matrix invariants in positive characteristic, J. Pure Appl. Alg. 176 (2002), 61-80.

[26] M. Domokos and A. N. Zubkov, Semisimple representations of quivers in characteristic p, Algebr. Represent. Theory 5 (2002), 305-317.

[27] M. Domokos, Matrix invariants and the failure of Weyl's theorem, in „Polynomial Identities and Combinatorial Methods" (ed. A. Giambruno, A. Regev, M. Zaicev), Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics 235 (2003), 215-236, Marcel Dekker.

[28] M. Domokos and P. E. Frenkel, On orthogonal invariants in characteristic 2, J. Algebra 274 (2004), 662-688.

[29] M. Domokos and P. E. Frenkel, Mod 2 indecomposable orthogonal invariants, Adv. Math. 192 (2005), 209-217.

[30] M. Domokos, Typical separating invariants, Transform. Groups 12 (2007), 49-63.

[31] M. Domokos, Multisymmetric syzygies, preprint, arXiv:math.RT/0602303.

[32] S. Donkin, Invariants of several matrices, Inv. Math. 110 (1992), 389-401.

[33] S. Donkin, Polynomial invariants of representations of quivers, Comment. Math. Helvetici 69 (1994), 137-141.

[34] J. Draisma, G. Kemper, and D. Wehlau, Polarization of separating invariants, Canad. J. Math., to appear.

[35] J. Dubnov and V. Ivanov, Sur l'abaissement de degre des polynomes en affineurs (French), C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS 41 (1943), 95-98.

[36] E. Formanek, The polynomial identities and invariants of $n \times n$ matrices, Regional Conference Series in Mathematics 78, Providence, RI; American Math. Soc., 55 p., 1991.

[37] P. Gabriel, Unzerlegbare Darstellungen I., Manuscripta Math. 6 (1972), 71-103.

[38] Wee Liang Gan and V. Ginzburg, Almost-commuting variety, D-modules, and Cherednik algebras, Int. Math. Research Papers 2006:2 (2006), 1-54.

[39] A. Giambruno and A. Regev, Wreath products and P.I. algebras, J. Pure Appl. Algebra 35 (1985), 133-149.

[40] F. D. Grosshans, Vector invariants in arbitrary characteristic, preprint, (2006).

[41] M. D. Haiman, Conjectures on the quotient ring by diagonal invariants, J. Algebraic Combin. 3, No. 1 (1994), 17-76.

[42] D. Happel, Relative invariants and subgeneric orbits of quivers of finite and tame type, J. Algebra 78 (1982), 445-459.

[43] D. Happel, Relative invariants of quivers of tame type, J. Algebra 86 (1984), 315-335.

[44] R. Howe and R. Huang, Projective invariants of four subspaces, Adv. Math. 118 (1996), 295-336.

[45] F. Hreinsdottir, Conjectures on the ring of commuting matrices, arXiv:math.AC/0501465

[46] Fr. Junker, Die Relationen, welche zwischen den elementaren symmetrischen Functionen bestehen (German), Math. Ann. 38 (1891), 91-114.

[47] Fr. Junker, Ueber symmetrische Functionen von mehreren Reihen von Veränderlichen (German), Math. Ann. 43 (1893), 225-270.

[48] Fr. Junker, Die symmetrischen Functionen und die Relationen zwischen den Elementarfunctionen derselben. (German) Math. Ann. 45 (1894), 1-84.

[49] V. G. Kac, Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, Invent. Math. 56 (1980), 57-92.

[50] I. Kaplansky, On a problem of Kurosch and Jacobson, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 496-500.

[51] A. D. King, Moduli of representations of finite dimensional algebras, Quart. J. Math. Oxford (2), 45 (1994), 515-530.

[52] A. A. Klein, Bounds for indices of nilpotency and nility, Arch. Math. (Basel) 74 (2000), 6-10.

[53] F. Knop, On Noether's and Weyl's bound in positive characteristic, in "Invariant theory in all characteristics" CRM Proc. Lecture Notes, 35 (2004), 175-188, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[54] K. Koike, Relative invariants of the polynomial rings over the A_r, $\tilde{A}_r$ quivers, Adv. Math. 86 (1991), 235-262.

[55] K. Koike, Relative invariants of the polynomial rings over the type D_r quivers, Adv. Math. 105 (1994), 166-189.

[56] L. Le Bruyn and C. Procesi, Semisimple representations of quivers, Trans. Amer. Math. Soc. 317 (1990), 585-598.

[57] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, Vol II, Cambridge Univ. Press, 1916.

[58] P. E. Newstead, Introduction to Moduli Problems and Orbit Spaces, Tata Institute Lecture Notes, Springer-Verlag, 1978.

[59] E. Noether, Der Endlichkeitssatz der Invarianten endlicher Gruppen, Math. Ann. 77 (1915), 89-92.

[60] P. J. Olver, Classical Invariant Theory, Cambridge University Press, 1999.

[61] C. Procesi, The invariant theory of $n \times n$ matrices, Adv. Math. 19 (1976), 306-381.

[62] Yu. P. Razmyslov, Trace identities of full matrix algebras over a field of characteristic zero, (Russian), Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. 38 (1974), 723-756.

[63] A. Regev, The representations of wreath products via double centralizing theorems, J. Alg. 102 (1986), 423-443.

[64] D. R. Richman, On vector invariants over finite fields, Adv. Math. 81 (1990), 30-65.

[65] D. R. Richman, Explicit generators of the invariants of finite groups, Adv. Math. 124 (1996), no. 1, 49-76.

[66] C. M. Ringel, The rational invariants of the tame quivers, Invent. Math. 58 (1980), 217-239.

[67] L. Schläfli, Über die Resultante eines Systemes mehrerer algebraischer Gleichungen, Vienna Academy Denkschriften 4 (1852).

[68] B. J. Schmid, Generating invariants of finite groups, C. R. Acad. Sci. Paris 308, Série I (1989), 1-6.

[69] B. J. Schmid, Finite groups and invariant theory, „Topics in Invariant Theory", Lect. Notes in Math. 1478 (1991), 35-66.

[70] A. Schofield, Semi-invariants of quivers, J. London. Math. Soc. (2) 43 (1991), 385-395.

[71] A. Schofield, General representations of quivers, Proc. London. Math. Soc. (3) 65 (1992), 46-64.

[72] A. Schofield and M. Van den Bergh, Semi-invariants of quivers for arbitrary dimension vectors, Indag. Math., N. S. 12 (2001), 125-138.

[73] G. W. Schwarz and D. L. Wehlau, Invariants of four subspaces, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 48 (1998), 667-697.

[74] Müfit Sezer, Sharpening the generalized Noether bound in the invariant theory of finite groups, J. Algebra 254 (2002), 252-263.

[75] K. S. Sibirskiĭ, Algebraic invariants for a set of matrices, (Russian), Sib. Math. Zhurnal 9 (1968), 152-164.

[76] A. Skowroński and J. Weyman, The algebras of semi-invariants of quivers, Transformation Groups 5 (2000), 361-402.

[77] S. A. Stepanov, Polynomial invariants of finite groups over fields of prime characteristic (Russian) Diskret. Mat. 11 (1999), no. 3, 3-14; translation in Discrete Math. Appl. 9 (1999), no. 4, 343-354.

[78] F. Vaccarino, The ring of multisymmetric functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 55 (2005), no. 3, 717-731.

[79] F. Vaccarino, Symmetric products, linear representations and the commuting scheme I: isomorphisms and embeddings, arXiv:math.AG/0602660.

[80] H. Weyl, The Classical Groups — Their Invariants and Representations, Princeton University Press, 1946.