Shelah tétele

Csirmaz László

Ebben a rövid jegyzetben a következő, *S. Shelah*tól származó tételt bizonyítjuk:

1. Tétel *Két struktúra akkor és csak akkor elemien ekvivalens, ha van izomorf ultrahatványuk.*

Bizonyítás. Legyen a két struktúra $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$, közös típusuk t, a t típusú formulák halmaza F_t. Olyan λ számosságot és $U \subset P(\lambda)$ ultraszűrőt keresünk, melyre ${}^\lambda\mathfrak{A}/U \approx {}^\lambda\mathfrak{B}/U$. Ehhez elsőként egy tiszta halmazelméleti fogalmat definiálunk és arra mondunk ki állításokat.

A bizonyítás során λ, μ és β végtelen reguláris számosságokat jelentenek, ezeket rögzítjük.

Definíció $F \subset {}^\lambda\beta$ és $D \subset P(\lambda)$ esetén $F \perp D$ jelöli azt, hogy a következő két feltétel teljesül:

(i) D bármely két elemével együtt azok metszetét is tartalmazza;

(ii) ha a $G \subset F$, $|G| < \mu$ részhalmaz minden $g \in G$ eleméhez egy $\sigma_g \in \beta$ rendszámot rendeltünk, akkor a
$$\{\nu < \lambda \,:\, \text{minden } g \in G\text{-re } g(\nu) = \sigma_g\}$$
halmaz D minden elemét metszi. ∎

Világos, hogy $F \perp D$ akkor és csak akkor, ha F-nek minden μ-nél kisebb számosságú F' részére $F' \perp D$. Így speciálisan ha $F \perp D$ és $F' \subset F$, akkor egyúttal $F' \perp D$. Az is világos, hogy ha D teljesíti az (i) feltételt, akkor $F \perp D$ akkor és csak akkor, ha minden $A \in D$-re $F \perp \{A\}$. Végül ha F nem üres, akkor D-nek az üres halmaz nem lehet eleme.

A $D \subset P(\lambda)$ halmadrendszer *centrált*, ha akárhogyan is veszünk ki véges sokat D elemei közül, azok metszete nem üres. Így ha $F \neq \emptyset$ és $F \perp D$ akkor D centrált. A D által generált szűrőt $U(D)$ jelöli, azaz
$$U(D) = \{A \subset \lambda : (\exists X \in D)\,(X \subset A)\}.$$
Végül $A \subset \lambda$ mellett $D\,(+)\,A$ jelöli a
$$D \cup \{A \cap X : X \in D\}$$
halmazrendszert.

1. Lemma *Legyen α egy rendszám és legyen $\xi < \alpha$-ra $D_\xi \subset P(\lambda)$ növő, azaz $\xi < \eta < \alpha$ esetén $D_\xi \subset D_\eta$; továbbá tegyük fel, hogy $F \perp D_\xi$ mindegyik $\xi < \alpha$-ra. Ekkor $F \perp \bigcup\{D_\xi : \xi < \alpha\}$.* ∎

2. Lemma *Tegyük fel, hogy $\sigma < \mu$ esetén $\lambda^\sigma \le \lambda$, $\beta^\sigma \le \lambda$. Ekkor van $F \subset {}^\lambda\beta$, $|F| = 2^\lambda$, melyre $F \perp \{\lambda\}$.*

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy $\mu \leq \lambda$, hiszen $\lambda^\lambda = 2^\lambda > \lambda$. Legyen

$$H = \{\langle A, S, h\rangle \, : \, A \subset \lambda, |A| < \mu, S \subset P(A), |S| < \mu, \text{ és } h \, : \, S \to \beta\}.$$

Ekkor $|H| = \lambda$. Ebből $|H| \geq \lambda$ nyilvánvaló, másrészt rögzített A és S mellett a különböző $h \, : \, S \to \beta$ függvények száma $\beta^{|S|}$, ami $|S| < \mu$ miatt legfeljebb λ. Hasonlóképpen rögzített A mellett $|P(A)| = 2^{|A|} \leq \lambda^{|A|} \leq \lambda$, és így a különböző S-ekből legfeljebb

$$\sum_{\sigma<\mu} \lambda^\sigma \leq \mu \cdot \lambda = \lambda$$

lehet, tehát $|H| \leq \left(\sum_{\sigma<\mu} \lambda^\sigma\right) \cdot \left(\sum_{\sigma<\mu} \lambda^\sigma\right) \cdot \lambda = \lambda$.

Ezek szerint a H halmazt fel lehet λ típusban sorolni, legyen $H = \{\langle A_\xi, S_\xi, h_\xi\rangle \, : \, \xi < \lambda\}$. Legyen most $B \subset \lambda$ tetszőleges, és

$$f_B(\xi) = \begin{cases} h_\xi(B \cap A_\xi) & \text{ha } B \cap A_\xi \in S_\xi, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Álítjuk, hogy $F = \{f_B \, : \, B \subset \lambda\}$ megfelelő. Valóban, $B \neq C$ esetén $f_B \neq f_C$, így $|F| = 2^\lambda$. Az $F \perp \{\lambda\}$ ellenőrzéséhez legyen $\tau < \mu$, $G = \{f_{B_\varrho} \, : \, \varrho < \tau\}$, és az f_{B_ϱ}-hoz választott rendszám σ_ϱ. Olyan $\nu < \lambda$ indexet kell találnunk, melyre $f_{B_\varrho} = \sigma_\varrho$ minden $\varrho < \tau$-ra. Mivel a B_ϱ részhalmazokból μ-nél kevesebb van, azért található olyan $A \subset \lambda$, $|A| < \mu$, hogy ha $\varrho_1 \neq \varrho_2$ akkor $A \cap B_{\varrho_1} \neq A \cap B_{\varrho_2}$. Ekkor H-nak van olyan $\langle A_\nu, S_\nu, h_\nu\rangle$ tagja, hogy

$$A_\nu = A, \quad S_\nu = \{B_\varrho \cap A \, : \, \varrho < \tau\}, \quad \text{és } h_\nu(B_\varrho \cap A) = \sigma_\varrho.$$

Ez a $\nu < \lambda$ megfelelő: $f_{B_\varrho}(\nu) = h_\nu(B_\varrho \cap A) = \sigma_\varrho$, ahogyan kívántuk. ■

3. Lemma *Legyen $F \perp D$ és $A \subset \lambda$. Ekkor van $F' \subset F$ és $D' \supset D$ hogy $F' \perp D'$, $|F - F'| < \mu$, $|D' - D| \leq |D|$, és vagy $A \in U(D')$ vagy $\lambda - A \in U(D')$.*

Bizonyítás. Legyen $D' = D\,(+)\,X$ és $D'' = D\,(+)\,(\lambda - X)$. Világos, hogy ha $F \perp D'$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel tehát, hogy $F \not\perp D'$, azaz van olyan $G' \subset F$, $|G'| < \mu$ és olyan $\sigma' \, : \, G' \to \beta$ függvény, hogy valamely $X' \in D$-re

$$X' \cap A \cap \{\nu < \lambda : \text{ minden } g \in G'\text{-re } g(\nu) = \sigma'_g\} = \emptyset. \tag{1}$$

Legyen $F' = F - G'$, állítjuk, hogy $F' \perp D''$, amivel a lemmát is bizonyítjuk. Valóban, legyen $G \subset F'$, $|G| < \mu$ és $\sigma \, : \, G \to \beta$ adott. Felhasználva az $F \perp D$ feltételt a $G \cup G'$ (még mindig μ-nél kisebb számosságú) halmazra valamint a $\sigma \cup \sigma'$ függvényre, kapjuk, hogy tetszőleges $X \in D$-hez van olyan $\nu < \lambda$ index (mivel még $X \cap X' \in D$ is igaz) hogy $\nu \in X \cap X'$, $g(\nu) = \sigma'_g$ minden $g \in G'$-re, és $g(\nu) = \sigma_g$ ha $g \in G$. Az (1) alapján ilyen ν nem lehet $X' \cap A$-ban, következésképp

$$X \cap (\lambda - A) \cap \{\nu < \lambda : \text{ minden } g \in G\text{-re } g(\nu) = \sigma_g\} \neq \emptyset$$

hiszen még az X'-vel való metszete sem üres. ■

4. Lemma *Legyen* $F \perp D$, $|D| \leq \kappa$ *és* $A_\xi \subset \lambda$ *minden* $\xi < \kappa$*-ra, ahol* $\kappa \geq \mu$ *tetszőleges számosság. Ekkor van olyan* $F' \subset F$ *és* $D' \supset D$ *hogy* $F' \perp D'$, $|F - F'| \leq \kappa$, $|D' - D| \leq \kappa$, *továbbá minden* $\xi < \kappa$*-ra*

$$\text{vagy } A_\xi \in U(D') \quad \text{vagy } \lambda - A_\xi \in U(D').$$

Bizonyítás. Az előző és az 1. lemma alapján egyszerű indukcióval adódik. ∎

5. Lemma *Tegyük fel, hogy* $\beta < \mu$, *és legyen* $F \perp D$, $|D| \leq \kappa$, *továbbá* $G \subset {}^\lambda\beta$, $|G| \leq \kappa$, *ahol* $\kappa \geq \mu$ *tetszőleges számosság. Ekkor van olyan* $F' \subset F$, *hogy* $|F - F'| \leq \kappa$ *és minden* $f \in F'$ *és* $g \in G$*-re*

$$F' - \{f\} \perp D\,(+)\,\{\nu < \lambda \,:\, f(\nu) = g(\nu)\}.$$

Bizonyítás. Az állítást nyilván elég $|G| = 1$-re bizonyítani, továbbá $|D| \leq \kappa$ miatt azt is feltehetjük, hogy $|D| = 1$. Ha ugyanis minden $A \in D$-re $F \perp \{A\}$, akkor egyúttal $F \perp D$ is igaz. Legyen tehát $D = \{A\}$ és $G = \{g\}$. Elég azt belátni, hogy ha $F \perp \{A\}$, akkor van olyan $F' \subset F$, $|F'| < \mu$ ($\leq \kappa$), hogy

(2) $$\text{minden } f \in F - F'\text{-re } F - F' - \{f\} \perp \{A\}\,(+)\,\{\nu < \lambda \,:\, f(\nu) = g(\nu)\}.$$

Legyen $F_0 = \emptyset$ és definiáljuk az $F_\alpha \subset F$ sorozatot $\alpha < \beta$-ra a következőképpen. $F_\alpha = \bigcup\{F_\gamma : \gamma < \alpha\}$ ha α limesz; $F_{\alpha+1} = F_\alpha$ ha $F' = F_\alpha$-val (2) teljesül. Végül ha ez nem így van, akkor van $f_\alpha \in F - F_\alpha$ és $H_\alpha \subset F - F_\alpha - \{f_\alpha\}$, $|H_\alpha| < \mu$, továbbá minden $h \in H_\alpha$-ra egy $\sigma_h \in \beta$, hogy

(3) $$A \cap \{\nu < \lambda \,:\, f_\alpha(\nu) = g(\nu)\} \cap \{\nu < \lambda \,:\, \text{minden } h \in H_\alpha\text{-ra } h(\nu) = \sigma_h\} = \emptyset.$$

Legyen ekkor $F_{\alpha+1} = F_\alpha \cup H_\alpha \cup \{f_\alpha\}$. Állítjuk, hogy $F' = F_\beta$-val (2) teljesül. Először is megjegyezzük, hogy ha $F_{\alpha+1} = F_\alpha$, akkor $F_\beta = F_\alpha$, és a konstrukció miatt (2) valóban fennáll. Elegendő tehát igazolni, hogy $F_{\alpha+1} = F_\alpha$ valamilyen $\alpha < \beta$-ra. Tegyük fel, hogy nem, azaz f_α és H_α minden $\alpha < \beta$-ra létezik. Ekkor $\beta < \mu$ és $|H_\alpha| < \mu$ miatt $H = \bigcup\{H_\alpha \,:\, \alpha < \beta\}$ számossága is kisebb μ-nél (μ reguláris). Az $\{f_\alpha\} \cup H_\alpha$ halmazok diszjunktak és $F \perp \{A\}$, ezért

$$A \cap \{\nu < \lambda \,:\, \text{minden } \alpha < \beta\text{-ra } f_\alpha(\nu) = \alpha\} \cap \{\nu < \lambda \,:\, \text{minden } h \in H\text{-ra } h(\nu) = \sigma_h\} \neq \emptyset.$$

Legyen $\nu < \lambda$ ennek a halmaznak egy eleme. (3) miatt minden $\alpha < \beta$-ra $f_\alpha(\nu) \neq g(\nu)$, viszont $\alpha = g(\nu)$-re $f_\alpha(\nu) = \alpha = g(\nu)$, ellentmondás. ∎

Ezek után rátérünk a tétel bizonyítására. Emlékeztetünk arra, hogy a két egymással ekvivalens struktúra $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$, közös típusuk t, a t típusú formulák halmaza F_t. Legyenek most λ, μ és β olyan végtelen reguláris számosságok, melyekre $|A| \leq \beta$, $|B| \leq \beta$, $|F_t| \leq \beta$, $\beta < \mu$, végül minden $\sigma < \mu$-re $\lambda^\sigma \leq \lambda$. Egyrészt világos, hogy ilyen számosságok vannak, másrészt $\mu \leq \lambda$. Legyen továbbá $\kappa = 2^\lambda$. Rögzítsük A elemeinek egy $|A| \leq \beta$ típusú, és B elemeinek egy $|B| \leq \beta$ típusú felsorolását:

$$A = \{c_\alpha \,:\, \alpha < |A|\}; \quad B = \{d_\alpha \,:\, \alpha < |B|\}.$$

Mivel $|A| < \mu \leq \lambda$, azért $|{}^\lambda A| = |A|^\lambda \leq 2^\lambda = \kappa$, és hasonlóan $|{}^\lambda B| \leq \kappa$, azért mind ${}^\lambda A$, mind ${}^\lambda B$ felsorolható κ típusban, csakúgy, mint $P(\lambda)$, egy–egy ilyen felsorolást is rögzítünk.

Az U ultraszűrő természetesen $P(\lambda)$-nak lesz része. Az ${}^\lambda\mathfrak{A}/U$ és ${}^\lambda\mathfrak{B}/U$ közötti izomorfizmust úgy biztosítjuk, hogy $\xi < \kappa$-ra definiáljuk az $a_\xi \in {}^\lambda A$ és $b_\xi \in {}^\lambda B$ elemeket a következő tulajdonságokkal:

$$^\lambda A = \{a_\xi \,:\, \xi < \kappa\}, \qquad {}^\lambda B = \{b_\xi \,:\, \xi < \kappa\};$$

valamint minden n szabad változós $\varphi \in F_t$ formulára és $\tau_1, \ldots, \tau_n < \kappa$-ra

$$\{\nu < \lambda \,:\, \mathfrak{A} \models \varphi[a_{\tau_1}, \ldots, a_{\tau_n}]\,\} \in U$$

akkor és csak akkor, ha

$$\{\nu < \lambda \,:\, \mathfrak{B} \models \varphi[b_{\tau_1}, \ldots, b_{\tau_n}]\,\} \in U.$$

Innen azonnal adódik, hogy ξ, $\eta < \kappa$ esetén a_ξ és a_η akkor és csak akkor esik ugyanabba az U szerinti osztályba, ha b_ξ és b_η ugyanabba az osztályba esik:

$$\{\nu < \lambda \,:\, a_\xi(\nu) = a_\eta(\nu)\} \in U$$

pontosan akkor áll fenn, ha a ugyanez a megfelelő b_ξ, b_η elemekre fennáll. Így az $a_\xi \leftrightarrow b_\xi$ megfeleltetés kiterjeszthető az ${}^\lambda\mathfrak{A}/U$ és a ${}^\lambda\mathfrak{B}/U$ elemei közötti megfeleltetéssé: az a_ξ ekvivalencia osztályának, $\overline{a_\xi}$-nak $\overline{b_\xi}$-t feleltetjük meg. Ez izomorfizmus is: tetszőleges n-változós $\varphi \in F_t$ formulára és ${}^\lambda\mathfrak{A}/U$-nak n elemére, ha azok az $a_{\tau_1}, \ldots, a_{\tau_n}$ függvények ekvivalencia osztályai,

$${}^\lambda\mathfrak{A}/U \models \varphi[\overline{a_{\tau_1}}, \ldots, \overline{a_{\tau_n}}]$$

akkor és csak akkor, ha

$$\{\nu \in \lambda \,:\, \mathfrak{A} \models \varphi[a_{\tau_1}(\nu), \ldots, a_{\tau_n}(\nu)]\,\} \in U,$$

ami a feltétel szerint pontosan akkor igaz, ha

$$\{\nu \in \lambda \,:\, \mathfrak{B} \models \varphi[b_{\tau_1}(\nu), \ldots, b_{\tau_n}(\nu)]\,\} \in U,$$

azaz

$${}^\lambda\mathfrak{B}/U \models \varphi[\overline{b_{\tau_1}}, \ldots, \overline{b_{\tau_n}}],$$

ahogyan kívántuk.

A jelölések egyszerűsítése érdekében τ-val jelöljük a $\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$ rendszám n-est, $\tau < \xi$ azt jelenti, hogy a $\tau_1, \ldots, \tau_n$ mindegyike kisebb ξ-nél. Adott n-változós $\varphi \in F_t$ formulára és τ rendszám n-esre

$$A(\varphi; \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu < \lambda \,:\, \mathfrak{A} \models \varphi[a_{\tau_1}(\nu), \ldots, a_{\tau_n}(\nu)]\,\},$$

és

$$B(\varphi; \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu < \lambda \,:\, \mathfrak{B} \models \varphi[b_{\tau_1}(\nu), \ldots, b_{\tau_n}(\nu)]\,\},$$

Használni fogjuk még az $A(\varphi; \xi, \tau)$ és $B(\varphi; \xi, \tau)$ jelöléseket is $n+1$-változós $\varphi \in F_t$ formulákra értelem szerint, például

$$A(\varphi; \sigma, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi[a_\xi(\nu), a_{\tau_1}(\nu), \ldots, a_{\tau_n}(\nu)]\,\}.$$

Nyilván $A(\varphi; \tau) = \lambda - A(\neg\varphi; \tau)$, valamint

$$A(\varphi_1; \tau_1) \cap A(\varphi_2; \tau_2) = A(\varphi_1 \wedge \varphi_2; \tau_1 \cup \tau_2).$$

Az $a_\xi \in {}^\lambda A$ és $b_\xi \in {}^\lambda B$ mellett definiáljuk $\xi < \kappa$-ra az $F_\xi \subset {}^\lambda\beta$ csökkenő, valamint a $D_\xi \subset P(\lambda)$ és $U_\xi \subset P(\lambda)$ növekvő sorozatokat úgy, hogy a következő tulajdonságaik legyenek:

(i) $|F_\xi| = \kappa$, $|F_0 - F_\xi| \leq \lambda + |\xi|$, $|D_\xi| \leq \lambda + |\xi|$, $U_\xi = U(D_\xi)$;

(ii) $F_\xi \perp D_\xi$;

(iii) minden n-változós $\varphi \in F_t$ formulára és $\tau = \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$, $\tau < \xi$-re $A(\varphi; \tau)$ és $A(\neg\varphi; \tau)$ közül pontosan az egyik eleme U_ξ-nek;

(iv) minden $\varphi \in F_t$ és $\tau < \xi$-re $A(\varphi; \tau) \in U_\xi$ akkor és csak akkor, ha $B(\varphi; \tau) \in U_\xi$.

Ha ezeken felül még azt is tudjuk biztosítani, hogy ${}^\lambda A$ minden eleme szerepeljen a_ξ-ként, ${}^\lambda B$ minden eleme b_ξ-ként, továbbá λ minden X részhalmazára vagy X vagy $\lambda - X$ eleme legyen valamelyik U_ξ-nek, akkor készen vagyunk: $U = \bigcup\{U_\xi : \xi < \kappa\}$ ultraszűrő λ-n (mert $F_\xi \neq \emptyset$ miatt D_ξ centrált, és így U_ξ is centrált, továbbá λ bármely részhalmazára U vagy azt, vagy a komplementerét tartalmazza), és az (iv) feltétel alapján $U \subset P(\lambda)$ és az $\{a_\xi : \xi < \kappa\}$ és $\{b_\xi : \xi < \kappa\}$ sorozatok megfelelők.

Lássuk tehát a definíciókat. Először is $\xi = 0$-ra legyen $D_0 = \{\lambda\}$, és $F_0 \subset {}^\lambda\beta$ olyan, a 2. lemma alapján létező halmaz, amire

$$|F_0| = 2^\lambda = \kappa, \quad \text{és } F_0 \perp D_0.$$

Végül legyen $U_0 = U(D_0)$, ami jelent esetben megegyezik D_0-lal. A feltételek közül (i) és (ii) nyilván teljesül, (iii) és (iv) pedig azért, mert ha φ-nek nincs szabad változója, azaz φ zárt, akkor vagy $A(\varphi;) = \lambda$ vagy $A(\varphi;) = \emptyset$ attól függően, hogy $\mathfrak{A}$-ban igaz-e a φ vagy sem. Másrészt $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$ elemien ekvivalensek, így zárt φ-re $A(\varphi;) = B(\varphi;)$.

Ha ξ limesz és minden $\eta < \xi$-re definiáltuk az F_η, D_η, U_η halmazokat valamint az $a_\eta \in {}^\lambda A$ és $b_\eta \in {}^\lambda B$ elemeket, akkor $F_\xi = \bigcap\{F_\eta : \eta < \xi\}$, $D_\xi = \bigcup\{D_\eta : \eta < \xi\}$ és $U_\xi = \bigcup\{U_\eta : \eta < \xi\}$ megfelelő. Így elegendő csak rákövetkező rendszámokkal foglalkoznunk. Tegyük fel tehát, hogy F_ξ, D_ξ, U_ξ már megvan csakúgy mint a_η és b_η $\eta < \xi$-re úgy, hogy rájuk (i)—(iv) teljesül, és definiálni szeretnénk $F_{\xi+1}$, $D_{\xi+1}$, $U_{\xi+1}$-et valamint a_ξ-t és b_ξ-t. Vegyük észre, hogy $|F_\xi| = \kappa$ miatt $F_\xi \neq \emptyset$, és így D_ξ és U_ξ centrált rendszerek.

Elsőként vegyük $P(\lambda)$ rögzített κ típusú felsorolásában az első olyan X elemet, melyre sem X sem X komplementere nem eleme U_ξ-nek (ha ilyen egyátalán van), és alkalmazzuk a 3. lemmát F_ξ-re, D_ξ-re és X-re. Az adódó $F' \subset F_\xi$, $D' \supset D_\xi$ és $U' = U(D') \supset U(D_\xi) = U_\xi$ mellett (i)—(iv) továbbra is fennáll, és még vagy $X \in U'$ vagy $\lambda - X \in U'$. Ezzel biztosítottuk, hogy minden részhalmazra vagy ő vagy komplementere valamelyik U_ξ-ben benne legyen.

Ezek után a szerint, hogy ξ páros vagy páratlan, vagy a_ξ-nek választjuk ${}^\lambda A$ elemei közül a legkisebb olyat, ami nincs az $\{a_\eta : \eta < \xi\}$ halmazban, vagy pedig b_ξ-nek választjuk a ${}^\lambda B - \{b_\eta : \eta < \xi\}$ halmaz minimális elemét. Ezzel elérjük, hogy mind ${}^\lambda A$ mind ${}^\lambda B$ valamennyi eleme sorra kerüljön. Mivel a két eset teljesen szimmterikus, csak az elsővel foglalkozunk, azaz a_ξ megvan, és keressük b_ξ-t, $F_{\xi+1}$-et és $D_{\xi+1}$-et.

Minden $(n+1)$-változós $\varphi \in F_t$ formulára és $\tau = \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$, $\tau < \xi$-re tekintsük az

$$A(\varphi; \xi, \tau) = \{\nu < \lambda : \mathfrak{A} \models \varphi[a_\xi(\nu), a_{\tau_1}(\nu), \ldots, a_{\tau_n}(\nu)]\}$$

halmazokat. Mivel $|F_t| \leq \lambda$, azért ezekből a halmazokból legfeljebb $\lambda + |\xi|$ darab van. A 4. lemmát F' és D'-re valamint ezekre a halmazokra alkalmazva kapjuk, hogy vannak olyan $F'' \subset F'$, $D'' \supset D'$ és $U'' = U(D'') \supset U'$ halmazok is, hogy ezekre is teljesülnek az (i)—(iv) feltételek, és ezen kívül minden $(n+1)$-változós $\varphi \in F_t$ formulára és $\tau < \xi$-re

$$\text{vagy } A(\varphi; \xi, \tau) \in U'' \text{ vagy } A(\neg\varphi; \xi, \tau) = \lambda - A(\varphi; \xi, \tau) \in U''.$$

Emlékeztetünk rá, hogy $B = \{d_\varrho : \varrho < |B|\}$ a B elemeinek egy $\leq \beta$ típusú felsorolása. Egy $(n+1)$-változós $\psi \in F_t$ formulára és $\tau = \langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle < \xi$-re legyen a $g_{\psi;\tau} : \lambda \to \beta$ függvény a következőképpen definiálva:

$$g_{\psi;\tau}(\nu) = \begin{cases} \min\{\varrho < |B| \,:\, \mathfrak{B} \models \psi[d_\varrho, b_{\tau_1}(\nu), \dots, b_{\tau_n}(\nu)]\} & \text{ha ilyen } \varrho \text{ van} \\ 0 \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Ilyen g függvényből legfeljebb $\lambda + |\xi|$ darab van, így az 5. lemma alapján van $F''' \subset F''$ hogy minden $f \in F'''$-re

(4) $$F''' - \{f\} \perp D'' \, (+) \, \{\nu < \lambda \,:\, f(\nu) = g_{\psi;\tau}(\nu)\}.$$

Mivel $|F'' - F'''| \leq \lambda + |\xi| < \kappa$, azért $F''' \neq \emptyset$, válasszuk $f \in F'''$-t tetszőlegesen, és legyen

$$F_{\xi+1} = F''' - \{f\}.$$

A $b_\xi \in {}^\lambda B$-t definiáljuk a következőképpen:

$$b_\xi(\nu) = \begin{cases} d_{f(\nu)} & \text{ha } f(\nu) < |B| \\ d_0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Végül legyen

$$D_{\xi+1} = D'' \cup \{X \cap B(\varphi;\xi,\tau) \,:\, X \in D'' \text{ és } A(\varphi;\xi,\tau) \in U''\}$$
$$U_{\xi+1} = U(D_{\xi+1}).$$

Állítjuk, hogy ez a választás jó. Az (i)-ben szereplő számosságfeltételek nyilván teljesülnek. $F_{\xi+1} \perp D_{\xi+1}$ ellenőrzéséhez először is $D_{\xi+1}$ két elemével együtt azok metszetét is tartalmazza, $F''' \neq \emptyset$ miatt D'' centrált, és így X_1, $X_2 \in D$ és A_1, $A_2 \in U''$ esetén $X_1 \cap X_2 \in D''$ és $A_1 \cap A_2 \in U''$ is igaz, továbbá

$$B(\varphi_1;\xi,\tau_1) \cap B(\varphi_2;\xi,\tau_2) = B(\varphi_1 \wedge \varphi_2;\xi,\tau_1 \cup \tau_2),$$

és ugyanez áll az $A(\varphi;\xi,\tau)$ halmazokra.

Ha $A \models \varphi[a_\xi(\nu), a_\tau(\nu)]$, akkor természetesen $A \models \exists x\varphi[x, a_\tau(\nu)]$. Ezért $A(\varphi;\xi,\tau) \subset A(\exists x\varphi;\tau)$, így ha $A(\varphi;\xi,\tau) \in U''$, akkor $A(\exists x\varphi;\tau) \in U''$ is teljesül, és az (iii) feltétel miatt $A(\exists x\varphi;\tau) \in U_\xi$, végül (iv) alapján $B(\exists x\varphi;\tau) \in U_\xi \subset U''$. Ezek után $F_{\xi+1} \perp D_{\xi+1}$ második feltételét ellenőrizendő legyen $H \subset F_{\xi+1}$, $|H| < \mu$, és $h \in H$-ra $\sigma_h \in \beta$ adott. $D_{\xi+1}$ egy eleme $X \cap B(\varphi;\xi,\tau)$ alakú, ahol $X \in D''$ és $A(\varphi;\xi,\tau) \in U''$, és olyan $\nu \in X \cap B(\varphi;\xi,\tau)$ elemet keresünk, melyre $h(\nu) = \sigma_h$ minden $h \in H$-ra. Mivel $A(\varphi;\xi,\tau) \in U''$ esetén $B(\exists x\varphi;\tau) \in U''$ is igaz, van olyan $Y \in D''$, melyre $Y \subset X \cap B(\exists x\varphi;\tau)$. A (4) feltételt a $H \subset F''' - \{f\}$ és $Y \in D''$ halmazokra valamint a $g_{\varphi;\tau}$ függvényre alkalmazva kapjuk, hogy van olyan $\nu \in X \cap B(\exists x\varphi;\tau)$, melyre $h \in H$ eseténe $h(\nu) = \sigma_h$, továbbá $f(\nu) = g_{\varphi;\tau}(\nu)$. Elegendő megmutatnunk, hogy ez a ν eleme $B(\varphi;\xi,\tau)$-nak is. Mivel $\nu \in B(\exists x\varphi;\tau)$, azért $\mathfrak{B} \models \exists x\varphi[x, b_\tau(\nu)]$, tehát $g_{\varphi;\tau}$ definíciója miatt $g_{\varphi;\tau}(\nu) = \varrho < |B|$ és $\mathfrak{B} \models \varphi[d_\varrho, b_\tau(\nu)]$, azaz $f(\nu) = \varrho$ és b_ξ definíciója alapján $\mathfrak{B} \models \varphi[b_\xi(\nu), b_\tau(\nu)]$, vagyis $\nu \in B(\varphi;\xi,\tau)$, ahogyan kívántuk.

Az (iii) és (iv) feltételeket nyilván csak az $A(\varphi;\xi,\tau)$ alakú halmazokra kell ellenőriznünk. Ám a konstrukció miatt minden ilyen halmazra vagy ő vagy a komplementere U''-ben, és így a bővebb $U_{\xi+1}$-ben van, másrészt komplementer halmazok nem lehetnek $U_{\xi+1}$-ben, mert akkor $D_{\xi+1}$ tartalmazná az üres halmazt. Ez mutatja, hogy (iii) teljesül. Végül (iv)-hez ha $A(\varphi;\xi,\tau) \in U_{\xi+1}$, akkor persze $A(\varphi;\xi,\tau) \in U''$ is igaz, és ekkor $D_{\xi+1}$ definíciója alapján $D_{\xi+1}$ valamely eleme része $B(\varphi;\xi,\tau)$-nak, tehát $B(\varphi;\xi,\tau) \in U_{\xi+1}$. Ha pedig $A(\varphi;\xi,\tau) \notin U_{\xi+1}$, akkor $A(\neg\varphi;\xi,\tau) \in U''$, tehát $B(\neg\varphi;\xi,\tau) \in U_{\xi+1}$, és így $B(\varphi;\xi,\tau) \notin U_{\xi+1}$.

Az indukciós állítások tehát teljesülnek, a tétel bizonyítottuk. ∎